复合函数求导中的常见错误及启发式教学实践

吴斯迪
中国矿业大学（北京）理学院，北京 100083
DOI: 10.61369/RTED.2026150029

摘　　要： 复合函数求导是高等数学微分学中的重要内容，学生在学习过程中常出现函数层次辨识不清、内层函数导数遗漏、多层复合求导不完整、求导法则混用以及忽视函数定义域等问题。本文分析上述错误的主要表现及其认知成因，并以函数的复合结构与变量依赖关系为主线，构建融合认知冲突、问题引导、错例辨析与变式训练的启发式教学过程。该教学设计旨在引导学生由机械套用公式转向依据函数结构合理选择求导法则，从而提高求导过程的完整性、规范性与逻辑可解释性。

关 键 词： 高等数学；复合函数；链式法则；启发式教学

Common Errors in Differentiating Composite Functions and Heuristic Teaching Practice

Wu Sidi
School of Science, China University of Mining and Technology-Beijing, Beijing 100083

Abstract: Differentiation of composite functions is an important topic in the differential calculus component of Higher Mathematics. During the learning process, students frequently make errors such as failing to identify the hierarchical structure of a function, omitting the derivative of an inner function, carrying out incomplete differentiation of multilevel composite functions, confusing different differentiation rules, and neglecting the domain of the original function. This paper analyzes the principal manifestations and cognitive causes of these errors. With the compositional structure of functions and the dependence relations among variables as the central thread, a heuristic teaching process integrating cognitive conflict, guided questioning, analysis of erroneous solutions, and variation-based exercises is developed. The proposed teaching design aims to guide students from the mechanical application of formulas to the appropriate selection of differentiation rules according to functional structure, thereby improving the completeness, mathematical rigor, and logical transparency of the differentiation process.

Keywords: higher mathematics; composite functions; chain rule; heuristic teaching

引言

复合函数求导法则是微分学的基本运算法则，也是学生由基本初等函数求导过渡到综合求导的关键环节。基本初等函数的复合求导，以及隐函数、参数方程和多元复合函数的求导，均体现了变化率沿变量依赖关系逐层传递的思想[1]。因此，该内容不仅关系求导结果的准确性，也影响学生辨析函数结构、选择求导法则和规范表达的能力。现有教学常将链式法则概括为“外层函数求导，内层函数不变，再乘以内层函数的导数”。这一表述可作为操作提示，却不能代替对函数层次、变量关系及适用条件的理解。若教学过度依赖公式记忆和例题模仿，学生面对表达形式变化的函数时，往往难以辨认内外层结构，并易混淆链式法则、乘积法则与商法则。已有研究从法则证明、求导方法、多元复合函数求导及启发式教学等方面展开讨论[2-7]，表明链式法则教学还应重视逻辑依据、适用条件和知识迁移。基于此，本文分析复合函数求导中的典型错误及其成因，并探讨相应的启发式教学设计与实施。

一、复合函数求导中的常见错误及其成因

复合函数求导的首要困难在于辨识表达式的层次结构。部分学生习惯按符号出现的顺序理解函数，不能将复杂表达式视为若干基本函数依次复合而成的整体。例如，$y=\sin(x^2)$ 可写为 $u=x^2$、$y=\sin u$，其依赖关系是 x 先经过平方运算，再进入正弦函数。若缺乏层次意识，学生容易混淆 $\sin(x^2)$、$(\sin x)^2$、$[\sin(x^2)]^2$ 等形式相近而结构不同的函数，即使熟记基本求导公式，也难以确定求

项目信息：中国矿业大学（北京）教改项目“高等数学课程案例式—启发式—探究式教学改革研究与实践”（项目编号：J260702）。
作者简介：吴斯迪（1996—），女，湖南长沙人，讲师。研究方向：偏微分方程数值解。Email:wsd@cumtb.edu.cn。

Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

导次序并说明各因子的来源。

遗漏内层函数的导数是运用链式法则时最常见的错误。对 $y=\ln(1+x^2)$ 求导时，写成 $1/(1+x^2)$，仅完成了外层对数函数的求导，忽略了 $1+x^2$ 对 x 的变化；对 $y=\exp(\sin x)$ 求导时，若只写 $\exp(\sin x)$，同样表明求导止于外层。多层复合函数更易暴露这一问题。对于 $y=\exp[\sin(x^2)]$，其函数关系为 $x \to x^2 \to \sin(x^2) \to \exp[\sin(x^2)]$，导数中的 $\exp[\sin(x^2)]$、$\cos(x^2)$ 和 $2x$ 分别对应三个层次；遗漏任一层，求导链便会中断。将此类错误简单归因于“漏乘”或“粗心”，并未揭示其本质，即学生尚未理解变化率沿变量依赖关系逐层传递的机制。

复杂函数还可能同时包含复合、乘积、商或和差结构，求导法则的选择因而成为另一难点。函数 $y=x^2\sin x$ 的最外层运算是乘积，应先使用乘积法则；函数 $y=\sin(x^2)$ 的最外层是函数复合，应使用链式法则。若仅依据括号数量或局部符号判断，学生容易误判整体结构，或无序拼接多种法则。例如，对 $y=\ln[(1+x^2)/(1-x^2)]$ 求导时，应先处理最外层对数函数，再处理内部商式；若结构辨识不清，漏项、错号和求导不完整等问题往往同时出现。

定义域问题反映了学生对求导条件的忽视。对数函数、根式函数和分式函数的求导不仅是形式运算，还要求原函数有定义，且内外层函数在相应点可导。导数表达式化简后可能具有较大的形式定义域，但原函数的可导范围并不会因此扩大[1]。若只关注导数式的代数化简，而不返回原函数检查定义域，就容易将链式法则误解为脱离条件的符号变换。

上述错误具有共同的认知根源。首先，集中学习基本求导公式后，学生容易形成“识别局部形式—寻找对应公式—直接代入”的思维路径，而复合函数求导要求先把握整体结构。其次，中间变量常被视为临时替换符号，学生未充分认识到 $u=g(x)$ 表示变量依赖关系，因而可能写出 u 却忽略 du/dx，或混淆 dy/du 与 dy/dx。再次，若例题长期局限于单一的两层复合形式，学生虽能依靠外观模仿完成练习，却难以形成稳定的结构判断标准。最后，若评价只关注最终答案，结构辨识、法则选择和逐层求导中的障碍便难以显现，也不利于学生形成自我检查意识[9-10]。

二、基于结构理解的启发式教学实践

针对上述问题，教学实践以函数结构和变量依赖关系为主线，通过认知冲突、变量链分析、问题引导、错例辨析和变式训练，帮助学生理解链式法则的数学内涵，形成由整体到局部、逐层求导的思维方式[5-7]。

课堂导入选取 $y=(x^2+1)^2$，引导学生分别采用展开法和复合函数求导法计算。展开后可得 $y'=4x(x^2+1)$；若将 x^2+1 视为独立变量，仅对外层平方函数求导，则得到 $2(x^2+1)$。两种结果的矛盾表明，仅计算外层函数的变化率不能得到 y 关于 x 的变化率。令 $u=x^2+1$，则 dy/du 刻画 y 随 u 的变化，du/dx 刻画 u 随 x 的变化，二者共同决定 dy/dx。由此，内层导数不再是口诀中的“附加因子”，而成为变化率沿变量依赖关系传递的必要环节，链式法则的教学重点也由公式记忆转向数学依据的理解[2]。

对于多层复合函数，可借助变量链显化各层函数之间的依赖关系。以 $y=\exp[\sin(x^2)]$ 为例，依次设 $u=x^2$，$v=\sin u$，$y=\exp(v)$，得到 $x \to u \to v \to y$。函数结构应从最外层向内逐层辨识，导数计算则沿变量链依次写出 dy/dv、dv/du 和 du/dx。前者回答函数由哪些层次构成，后者说明各导数因子的来源。学生尚未熟练时保留中间变量和求导链，有助于减少跳步与遗漏；熟练后再适当简化书写。

课堂提问应围绕求导中的关键判断展开，包括最外层运算的识别、当前法则的选择、内层函数是否仍随 x 变化、内部是否还含有乘积、商或新的复合结构，以及所得导数是否符合原函数的定义域要求。教学初期可借助括号分层、箭头图示和板书标注呈现函数结构，随后逐步减少提示，使这些问题转化为学生独立求导时的自我检查程序[8]。

错例辨析用于揭示错误产生的具体环节。对于错误等式 $[\ln(1+x^2)]'=1/(1+x^2)$，分析重点不应笼统归因于“粗心”，而应指出求导仅作用于外层对数函数，未继续计算内层函数 $1+x^2$ 的导数。对于 $\exp[\sin(x^2)]$ 的不完整结果，则可依据变量链确定遗漏的层次及相应导数因子。追溯错误解答中最早失去数学依据的步骤，可以将结果偏差转化为对函数结构和法则条件的再认识。

变式训练应侧重改变函数结构，而非简单替换常数或指数。将 $\sin(x^2)$、$(\sin x)^2$、$[\sin(x^2)]^2$ 和 $x^2\sin x$ 置于同一组中比较，虽然各式符号相近，但其最外层运算和适用法则并不相同。在此基础上，可进一步引入含有对数、根式、商式及多层嵌套的函数，要求学生在求导前标明复合层次，在求导后说明各因子的来源。通过辨析相似形式与不同结构，引导学生由关注表达式外观转向把握函数结构，逐步形成稳定的法则选择和逐层求导能力。

三、课堂实施与教学反思

本次教学实践按照“诊断—建构—辨析—迁移—归纳”的思路组织。课前选取少量典型问题，考查学生对复合函数概念、基本求导公式以及乘积法则、商法则等前置知识的掌握情况，据此区分公式遗忘与结构辨识障碍，并调整课堂例题和提问层次。课堂导入通过比较同一函数的不同求导结果，引导学生分析差异产生的原因。在讲解 $y=f[g(x)]$ 时，同时引入 $u=g(x)$、$y=f(u)$，说明 dy/du 与 du/dx 分别刻画相邻变量之间的变化率，$dy/dx=(dy/du)(du/dx)$ 反映变化率沿变量依赖关系的传递，而不能简单理解为代数分式的约分。由二层复合推广至多层复合时，变量链相应延长，但链式法则的基本原理保持不变，这也为后续多元复合函数求导建立了认知联系[4]。

课堂练习围绕函数结构的辨识与求导方法的迁移展开。学生在计算前判断最外层运算及适用法则，在计算中保留必要的中间变量和求导链，并在完成后检查内层导数是否遗漏。对于同时含有复合、乘积或商的函数，分析遵循“整体优先、逐层处理”的原则，即先依据最外层结构确定当前法则，再依次处理内部结构；对于含有对数、根式或分母的函数，则同步检查定义域，使形式运算与可导条件相一致。课堂归纳将上述过程概括为结构化

 Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

的求导程序：先分解函数层次，再从最外层开始选择法则，每处理一层均判断内层是否仍随 x 变化，最后返回原函数确定导数的适用范围。课后作业继续设置基本计算、结构辨析和综合应用三类任务，评价内容除最终结果外，还包括函数层次判断、法则选择、求导链完整性及定义域表述。

从实施过程看，启发式教学的关键不在于增加提问数量，而在于使问题准确指向学生求导过程中存在的认知障碍。问题过密，容易使学生依赖外部提示；问题跨度过大，又会增加基础薄弱学生的理解负担。因此，教学初期可借助变量链、中间变量和箭头图示显化函数结构，待学生逐步形成独立判断能力后，再适时减少提示；对于已经掌握基本求导方法的学生，则可增加结构综合、表达式变形和定义域辨析，以促进知识迁移。同时，直观表征只能作为理解链式法则的辅助手段，教学中仍须明确法则成立的可导条件，避免将 dy、du、dx 误解为可以任意拆分和约去的代数符号。学生对函数结构和变量依赖关系的理解也难以通过一次教学稳定形成，需要在后续练习中持续巩固。课堂观察、作业修订以及学生对求导步骤的解释，可作为判断其理解程度的重要依据。后续教学还应将结构分析方法延伸至隐函数、参数方程和多元复合函数求导，并保持分析语言与书写规范的一致性，使学生逐步形成可迁移的链式思维。

四、结语

复合函数求导中的常见错误并非孤立存在，而是与函数层次辨识、变量依赖关系理解及整体结构判断密切相关。层次辨识不清容易导致内层导数遗漏，变量关系理解不足可能造成多层求导中断，整体结构判断失误则会引起求导法则混用。针对这些问题，本文以函数复合结构和变量依赖关系为主线，将认知冲突、变量链分析、问题引导、错例辨析与变式训练融入课堂教学，引导学生从表达式的整体结构出发选择求导法则，并逐层说明各导数因子的来源。上述教学实践旨在使链式法则由机械套用的运算规则转化为具有数学依据、便于检查并可向后续内容迁移的分析方法，同时也为复合函数求导教学的组织与改进提供参考。

参考文献

[1] 同济大学数学科学学院 . 高等数学 (上册) [M]. 第 8 版 . 北京 : 高等教育出版社 ,2023.

[2] 王永平 . 证明复合函数求导法则的教学建议 [J]. 高等数学研究 ,2022,25(5):19-20+24.

[3] 赵奎奇 , 方钢 . 关于复合函数的求导方法 [J]. 高等函授学报 (自然科学版),2008,21(5).

[4] 程涛 . 多元复合函数求导法则的教学探究 [J]. 科技创新导报 ,2013(20):146+148.

[5] 陈静安 , 方钢 , 刘云 . 高等数学启发式教学的认识与实践 [J]. 高等数学研究 ,2009,12(5):4-7.

[6] 赵轩 . 启发式教学在高等数学课程中的应用 [J]. 轻纺工业与技术 ,2020,49(1):191-192.

[7] 许毅 , 姜福全 . 高等数学课启发式教学浅析 [J]. 金融理论与教学 ,2011(3):81-83.

[8] 杜军 ." 支架式 " 教学应重视 " 脚手架 " 的搭建 [J]. 教育理论与实践 ,2005(14):51-53.

[9] 王雪 . 基于数学问题解决认知模式的数学错题分析 [D]. 北京 : 首都师范大学 ,2013.

[10] 双鹂 , 杨联华 . 高等数学教学中的误区分析 [J]. 教育探索 ,2008(9):41-42.

Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.