

从高考真题到数学建模教学的递进式探究范式 ——以信息熵为例

周青鹏, 吴鸿华

济南大学, 山东 济南 250002

DOI:10.61369/EIR.2026090041

摘 要 : 从高考真题中的一道新定义题出发, 依据高中数学课程标准, 构建 “真题引领 – 概念理解 – 综合建模” 递进式探究教学范式。依托盲盒开箱、课间零食选择等生活化案例, 实现从不确定性度量到熵权法多指标评价的建模实践, 完整经历建模各环节, 注重培养学生对模型结果的思辨意识, 为新定义类高考试题转化为高中数学建模课堂提供可操作的教学设计参考。

关 键 词 : 新高考; 信息熵; 熵权法; 数学建模; 高中数学

A Progressive Inquiry Paradigm from College Entrance Examination Authentic Questions to Mathematical Modeling Teaching — A Case Study of Information Entropy

Zhou Qingpeng, Wu Honghua

University of Jinan, Jinan , Shandong 250002

Abstract : Starting from a new-definition question in a real college entrance examination, and in accordance with the Curriculum Standards for Senior High School Mathematics, this paper builds a progressive inquiry teaching paradigm of "authentic exam-led – conceptual understanding – comprehensive modelling". Drawing on real-life cases such as unboxing blind boxes and choosing snacks during breaks, it carries out modelling practice from uncertainty measurement to multi-index evaluation using the entropy weight method. Students can go through all stages of mathematical modelling, with emphasis on cultivating their critical thinking about modelling outcomes. This paper provides actionable references for instructional design that transforms new-definition college entrance examination questions into senior high school mathematical modelling lessons.

Keywords : new college entrance examination; information entropy; entropy weight method; mathematical modelling; senior high school mathematics

引言

在新课标核心素养落地与新高考改革双重背景下, 数学建模作为六大数学学科核心素养之一, 强调学生应学会用数学模型解决实际问题, 积累数学实践经验, 提升实践能力和创新意识^[1]。然而, 当前高中建模教学实践仍推进困难: 其一, 不少课堂将数学建模局限于应用题的解题, 师生更在乎解题答案对不对, 忽视从真实情境提炼模型、反思模型局限并优化模型的思维训练^[2], 久之, 所谓的数学建模退化成了枯燥的习题; 其二, 建模教学资源匮乏^[3], 且有些建模活动往往需要师生亲身进行复杂实验并测量数据, 这使得建模难度通常较大、耗时也很长, 师生因为怕麻烦而对数学建模活动敬而远之, 使其难以被广泛推行。

高考试题, 尤其是新定义类高考真题, 本身便是命题专家构建的微型建模情境。试题通过陌生概念包装课内数学知识, 考查学生阅读理解、信息提取、知识迁移能力, 天然具备转化为建模探究课的潜力。但在一线教学中, 绝大多数教师对这类试题的处理一般是局限于习题讲评, 止步于选项对错辨析, 只完成局部推理训练, 并未挖掘试题背后承载的建模思维价值, 造成教学资源浪费。

从现有研究来看, 高中数学建模教学模式的相关研究可分为两类: 一类依托信息技术工具, 借助 GeoGebra 等可视化软件配合人工智能技术, 搭建 “教学设计 — 可视化建模 — 学生探究实践” 教学闭环, 降低抽象建模问题的认知门槛^{[4][5]}; 另一类聚焦情境案例开发, 依托现实生活问题开展项目式建模探究^{[6][7]}。但针对 “高考试题向建模课堂转化” 的专门教学范式研究仍较为薄弱, 缺少从习题解析自然过渡到完整建模实践的可操作流程。新定义题目如何跳出刷题讲评, 把客观题的概念辨析拓展成全流程建模探究, 成为落实建模素养亟待解决的课题。

一、教学模式构建

基于上述, 本文通过深度挖掘高考真题背后的数学建模价值, 以高考原题作为探究之根, 以核心概念作为探究之干, 以综合性建模活动作为探究之枝叶, 构建一种完整的递进式探究教学模式。该模式旨在把一道客观题拓展为一套完整探究任务, 分为三个环节:

①真题引领: 重点研究高考原题, 分析考点难点, 完成习题训练, 优先保证学生基础知识达标;

②概念理解: 剥离试题题型约束, 解剖新定义数学概念, 必要的话可适度拓展相关知识, 为落实下一环节做理论准备;

③综合建模: 把概念和理论迁移到真实生活情境, 完整走完建模全流程, 开展模型求解、结果解读与批判性反思, 实现知识向现实应用的迁移。

三个环节遵循由浅入深、由易到难、由理论到实践、由习题到现实的逻辑, 兼顾全体学生基础训练与高阶素养探究。

考虑到高中课堂实际, 模式设计宜遵循以下原则:

第一, 知识边界约束原则。教师须审慎选择教学内容, 确保数学建模过程中使用的数学工具在高中课程范围内, 必要时可以直观感知、实例归纳等方式替代严谨数理推导, 确保数学建模顺利进行。

第二, 重思维轻演算原则。第三环节重心应放在情境抽象、模型思辨、现实解读上, 把有限课堂时间留给思维活动, 数值计算可借助计算器或现代信息技术完成, 以免学生在计算中耗时过久。

相较于传统建模课需要专门开发全新情境素材, 该范式优势在于以高考真题为抓手, 打通应试训练与素养培养的壁垒, 既可以适配专题拓展课, 也可以简化改造后融入高三复习课堂。下文以信息熵高考真题为载体, 完整呈现该范式的课堂落地路径。

二、教学实践

本教学实践落实“真题引领-概念理解-综合建模”三层递进逻辑, 逐层实现习题训练、概念深化、实践迁移的目标, 设置分层学习任务, 兼顾基础巩固与高阶探究, 使不同层次学生都有所收获。教学设置三层目标如下(表1)。

表1 三层递进式探究活动的教学目标

目标层级	面向对象	具体目标
基础目标	全体学生	弄清原题思路并会利用公式计算简单离散分布的信息熵, 解释熵代表的现实含义
提高目标	大多数学生	理清从信息熵过渡到熵权法的逻辑, 可以说出模型的局限, 完成简单的数学建模活动
拓展目标	数学建模爱好者	进行进一步探究, 例如尝试灵敏度分析, 体会参数改变对模型输出带来的影响

教学实施过程中, 不要求机械记忆公式, 把信息熵理解为概率、对数组合得到的评价指标; 对数复杂运算允许学生借助计算器, 课堂重心放在抽象建模、解读结果、思辨讨论, 而不是繁杂

数值演算。教学流程由高考真题导入, 完成习题训练之后进入案例探究, 不终止于习题讲评。

(一) 真题引领: 依托考题完成概念初感知

1. 原题呈现

题目: (2020年新高考全国I卷12题·多选题) 信息熵是信息论中的一个重要概念。设随机变量 X 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, n$, 且 $P(X=i)=p_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n p_i=1$ 。定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$ 。下列说法中正确的是()

A 若 $n=1$, 则 $H(X)=0$ B 若 $n=2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大 C 若 $p_i=\frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $H(X)$ 随着 X 的增大而增大 D 若 $n=2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, m$, 且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j} (j=1, 2, \dots, m)$, 则 $H(X) \leq H(Y)$

答案: AC。

2. 考点与教学价值分析

该题外在是全新概念, 内核全部为高中课内知识, 主要考查对数运算规则、离散随机变量概率性质、利用导数研究函数单调性, 同时考查新定义阅读与逻辑推理能力, 学生可以代入特殊值、举反例完成选项判断。试题背后暗含凸函数与 Jensen 不等式思想^[8], 高中生无需严格证明, 但可以通过实例感知概率分布与熵值的变化关系。

逐项解析: A 选项只有一种可能结果, 事件完全确定, 熵值为0; B 选项二元信息熵函数在 $p_1=\frac{1}{2}$ 处取得最大值, 函数先增后减(图3.1); C 选项等概率条件下 $H=\log_2 n$, 熵随 X 增大而增大(图3.2); D 选项概率合并之后系统不确定性降低, 故 $H(X) \geq H(Y)$ 。

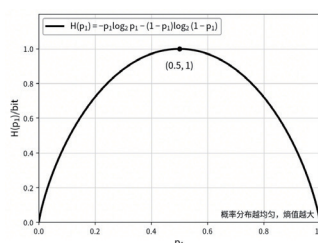


图3.1 二元信息熵函数图象

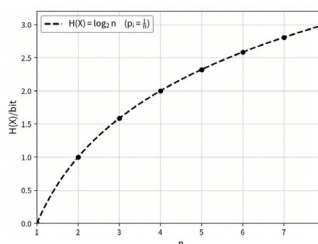


图3.2 概率均等条件下信息熵函数图象

该题最大的教学价值, 是示范了把现实当中“随机性强、难以预判”这类模糊的定性感受, 转化为可以计算、可以对比的数值指标, 这正是数学建模当中定性现象量化的核心思维。但客观题存在天然局限, 学生只做对错判断, 没有经历从现实情境提

取变量、估计概率、解读数值、反思模型缺陷的完整过程，这一部分需要在后续课堂当中补充完成。

（二）概念理解：剥离考题，建构概念体系

1. 自信息与离散信息熵

自信息刻画单一事件发生所携带的信息量： $I(x_i) = -\log_2 p(x_i)$ 。事件发生概率越小，事件发生后带来的信息量越大；必然事件的自信息等于 0。

离散香农信息熵定义： $H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$ 。约定 $0 \cdot \log_2 0 = 0$ ，单位为比特。

自信息针对单个事件，信息熵则是全部自信息按照概率求取的数学期望，用来刻画整个随机系统的平均不确定性。

2. 信息熵的性质

第一是非负性， $H(X) \geq 0$ ，系统完全确定时熵等于 0；第二是最大熵定理，在结果总数固定时，各结果概率均等，熵取得最大值 $\log_2 n$ 。概率分布越均匀，熵越大；概率集中到少数结果，熵就会变小。教学当中不必严格证明 Jensen 不等式，可以通过多组数值计算，引导学生归纳总结规律。条件熵、互信息作为拓展内容，仅供学有余力的学生学习。

（三）综合建模

本部分设置两级建模案例，由浅入深完成建模实践。案例一使用原始信息熵，度量真实随机系统的不确定性；设置过渡板块厘清信息熵到熵权法的演进逻辑；案例二开展熵权法多指标综合评价，完整走完建模闭环：情境导入—模型假设—数学建模—计算求解—结果解读—模型反思。

1. 案例一：盲盒开箱的信息熵计算

教学目标：掌握离散信息熵计算方法，可以从现实情境抽象概率分布，理解熵表征平均不确定性，建立“熵大不等于现实意义更好”的思辨认知。

情境导入：盲盒是高中生熟知的消费品，一套盲盒有 A、B 普通款，C 隐藏款，D 超级隐藏款。商家提供甲、乙两个版本。

版本甲： $P(A)=0.50$ ， $P(B)=0.35$ ， $P(C)=0.12$ ， $P(D)=0.03$

版本乙： $P(A)=0.35$ ， $P(B)=0.25$ ， $P(C)=0.28$ ， $P(D)=0.12$

主观感受版本乙开箱更难预测，尝试用信息熵定量对比两个版本开箱的平均不确定性。

模型假设：

- （1）每次开箱相互独立，不考虑外部操作干预概率；
- （2）商家标注概率为真实开箱概率；
- （3）模型仅度量开箱结果的不确定性，不考虑价格、收藏价值、性价比。

建模计算：

$$H_{\text{甲}} = -0.5 \log_2 0.5 - 0.35 \log_2 0.35 - 0.12 \log_2 0.12 - 0.03 \log_2 0.03 \approx 1.46 \text{ bit}$$

$$H_{\text{乙}} = -0.35 \log_2 0.35 - 0.25 \log_2 0.25 - 0.28 \log_2 0.28 - 0.12 \log_2 0.12 \approx 1.85 \text{ bit}$$

4 种结果系统最大熵为 $\log_2 4 = 2 \text{ bit}$ 。 $H_{\text{乙}} > H_{\text{甲}}$ ，版本乙开箱平均不确定性更高。

结果解读与模型反思：计算结果印证主观感受。接着提出思辨问题，由小组讨论：如果 4 种款式概率都是 0.25，熵值取得最大值，是否代表这款盲盒最好？熵更大，盲盒就更值得购买吗？

小组讨论并由教师总结可得：信息熵仅仅度量不确定程度，没有考虑价格和收藏价值等因素。全部款式概率均等时熵的确最大，但超级隐藏款不再稀缺，盲盒收藏价值就会大打折扣。所以熵值高只说明不确定性强，不意味着盲盒值得购买。

过渡板块：信息熵向熵权法演进逻辑

原始信息熵输入是真实随机事件的概率分布，输出熵，衡量系统不确定性。而现实大量评价问题不存在天然随机事件概率，需要做多指标综合打分。熵权法就是信息熵思想的工程改造。

逻辑链条：①把每一个评价指标看作一组数据分布，同一指标下样本差异越大，区分样本能力越强；②对指标正向化、标准化，构造归一化比重，注意该比重不是真实事件概率；③对每个指标计算熵值 e_j ：样本差异大， e_j 小，分配更大权重；样本数据接近， e_j 大，区分能力弱，分配更小权重；④由熵计算差异系数，归一化得到客观权重，加权计算综合得分。

简言之，信息熵度量真实随机系统不确定性；熵权法借用这套数学公式，依靠指标数据离散程度生成客观权重，实现多指标评价。

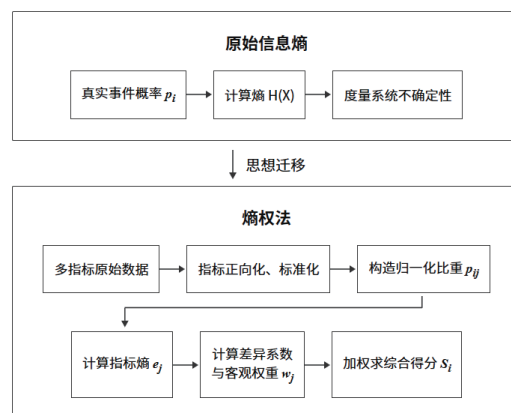


图 3.3 从信息熵到熵权法

2. 案例二：基于熵权法的课间零食综合评价

教学目标：理清信息熵到熵权法的转化逻辑，完整经历指标处理、熵值求权重、综合得分的建模流程，辨析模型优势与固有缺陷。

情境导入：教师：很多同学喜欢课间吃零食，但零食也有好有坏。如何选购更好的课间零食呢？怎么给零食进行综合打分更科学？学生讨论后，教师引出探究任务：用熵权法能对校园常见零食开展相对客观的综合评价。选取牛奶、全麦面包、薯片、饼干、巧克力、酸奶、辣条、蛋黄派共 8 种零食。师生共同确定 6 项评价指标：

指标名称	单价	热量	蛋白质	糖分	钠	主观口感
指标类型	负向	中间	正向	负向	负向	正向

注：营养数据可从包装上的营养成分表获取，主观口感通过班级小问卷获取；热量的参考最优值为 1200kJ/100g

模型假设：

- （1）所选指标覆盖主要考量维度，暂不纳入添加剂、保质期

等因素；

(2) 以采集到的数据作为模型输入；

(3) 熵权法的权重只体现样本区分能力，不完全等同于现实层面指标重要程度；

(4) 热量最优参考值为经验取值。

建模步骤：

样本数 $m=8$ ，指标数 $n=6$ ； x_{ij} 表示第 i 种零食第 j 项指标原始数据。

(1) 指标正向化。正向指标直接保留；负向指标 $x'_{ij} = \max(x_j) - x_{ij}$ ；中间指标（热量） $M_j = \max|x_{ij} - 1200|$ ， $x'_{ij} = 1 - \frac{|x_{ij} - 1200|}{M_j}$ 。

(2) Min-Max 标准化： $z_{ij} = \frac{x'_{ij} - \min(x'_j)}{\max(x'_j) - \min(x'_j)}$ ，增加极小常数规避取 0 对数无意义。

(3) 构造列内比重： $p_{ij} = \frac{z_{ij}}{\sum_{i=1}^m z_{ij}}$ ，强调此处不是真实事件概率。

(4) 计算各指标信息熵： $e_j = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m p_{ij} \cdot \ln(p_{ij})$ 。 e_j 越大代表指标区分样本能力越弱。

(5) 计算差异系数与权重：差异系数 $g_j = 1 - e_j$ ，权重 $w_j = \frac{g_j}{\sum_{j=1}^n g_j}$ 。

(6) 计算综合得分： $S_i = \sum_{j=1}^n w_j \cdot z_{ij}$ ，得分越高代表零食越适配课间场景。

结果解读与模型反思：模型输出结果当中，样本差异大的指标会获得更高权重，问卷口感打分集中，区分度弱，往往得到较低权重。综合得分上牛奶、酸奶、全麦面包排名靠前，辣条、薯片得分较低。

课堂探究思考题：现实意义十分重要的指标，若样本之间数值几乎一致，熵权法分配很小权重，这是否合理？修改热量最优参考值，猜测排名会不会发生改变。

师生共同总结模型局限：熵权法权重由样本区分度决定，不等同现实重要性；零食样本数量有限；未纳入过敏、添加剂等现实因素；中间指标最优值为经验设定，结果受参数影响。课堂再次强调：案例一的是真实随机事件概率；案例二熵权法当中只是归一化比重，二者数学形式相同，但现实含义不能混淆。

三、结论与建议

信息熵作为新定义高考真题素材，不应当仅仅作为一道习题处理。2020 年新高考 I 卷第 12 题依托概率、对数、函数等课内知识，示范了定性现象做定量刻画的建模范式。本文构建的“真题引领—概念理解—综合建模”递进式探究教学范式，从高考习题讲评切入，完成概念内化之后落地两级生活化建模案例，实现从习题训练向完整数学建模课堂的拓展。盲盒案例帮助学生理解原始信息熵对不确定性的度量；课间零食熵权法评价案例完成多指标综合评价建模实践，完整落实数学建模的全部环节，兼顾数学抽象、逻辑推理、数学运算、数学建模多项核心素养。

针对新定义试题转化为建模教学，提出几点教学建议。

第一，深度挖掘高考试题的素养价值，跳出“只讲题、练选项”的固化讲评模式。很多新定义试题具备建模教学潜力，可以依托真题搭建探究起点，把客观题的概念辨析拓展为完整建模探究活动。

第二，严格控制知识深度和广度，以适应高中生学情。如果讲授与综合建模环节相关性较弱的知识，可能增加大多数学生的认知负荷，这样则有可能把数学建模课异化成了“信息技术课”，也会削弱数学建模的教学效果。

第三，重视模型反思与批判性思维训练。数学模型是对现实的简化，模型输出数值不能直接等同于现实评判标准。教学当中要反复提醒学生：指标、参数、样本都会对模型结果带来影响，要结合现实条件辩证看待模型输出，不能盲目迷信计算结果。

此类以高考真题为起点的建模探究课，适合校本拓展课程、数学社团、专题探究课开展，能够打通高考备考与素养培育，为高中数学建模教学提供可落地的实践路径。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 [M]. 2017 年版 2020 年修订. 北京：人民教育出版社，2020.6:97-99.
- [2] 林淑慧. 福建两地高中数学建模教学现状比较和对策研究 [D]. 集美大学，2021.
- [3] 张文刚. 高中数学建模教学存在的问题及其对策 [J]. 教学与管理，2020，(19):62-64.
- [4] 李成龙，陈兆英，朱安新. GeoGebra 与对话式 AI 教学培养高中生数学建模素养——以椭圆最值与轨迹问题为例 [J]. 教育创新与研究，2025，1(04):22-25.
- [5] 胡光裕，同伟. GeoGebra 平台下高中数学建模教学的实践探索——以“管道直角弯头的制作”为例 [J]. 教学考试，2026，(20):62-65.
- [6] 谢新. 高中数学建模教学中项目式学习的应用实践 [J]. 数理天地（高中版），2026，(7):99-101.
- [7] 欧阳才学. 高中数学建模教学中“项目式学习”的深度融合与实现路径 [J]. 高中数理化，2024(15):75-78.
- [8] 李鸿昌. 函数的凹凸性与信息熵——从 2020 年新高考全国 I 卷第 12 题谈起 [J]. 中学数学研究（华南师范大学版），2023，(21):43-45.