

一类具有 RPS 循环的生态模型的动力学研究

储著松

安徽新华学院, 安徽 合肥 230088

DOI:10.61369/ME.2026070022

摘 要 : 本文研究了一类新型的具有 RPS 循环效应的随机生态模型. 应用随机微分方程相关理论, 研究了该模型正解的存在性与唯一性, 并证明解的随机有界性.

关 键 词 : 白噪声; 存在性; 唯一性; 随机有界性

Dynamical Analysis of a Ecological Model with RPS Cyclic Effect

Chu Zhusong

Anhui Xinhua University, Hefei, Anhui 230088

Abstract : In this paper, a novel stochastic ecological model with RPS cyclic effect is considered. Using some theories of stochastic differential equations, we study the existence and uniqueness of positive solution of the model, and demonstrate the positive solution is stochastically bounded.

Keywords : white noise; existence; uniqueness; stochastic boundedness

引言

种群系统是生态系统的重要部分, 国内外专家学者对相关系统模型的研究也取得了很多成果^[1-3]. 通过阅读相关文献^[4-5], 本文提出了一类新颖的具有 RPS 循环效应的海洋种群系统模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c_1x(1 - px - y - z) - c_3xz - m_1x \\ \frac{dy}{dt} = qc_2y(1 - px - y - z) + pc_2xy - c_3yz - m_2y \\ \frac{dz}{dt} = c_3z(px + y) - m_3z \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t), y(t), z(t)$ 分别表示藤壶, 藻类, 贝类在 t 时刻的种群密度; c_1, c_2, c_3 分别表示藤壶, 藻类, 贝类的定居率; m_1, m_2, m_3 分别表示藤壶, 藻类, 贝类的死亡率; p, q 为系数且满足 $0 < p < 1, 0 < q < 1$.

在自然环境中, 生态系统不可避免地受到环境噪声的影响^[6-7], 因此为了使模型更加合理, 我们引入了白噪声, 建立了如下随机系统模型:

$$\begin{cases} dx = [c_1x(1 - px - y - z) - c_3xz - m_1x]dt + \sigma_1xdB_1(t) \\ dy = [qc_2y(1 - px - y - z) + pc_2xy - c_3yz - m_2y]dt + \sigma_2y dB_2(t) \\ dz = [c_3z(px + y) - m_3z]dt + \sigma_3z dB_3(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\sigma_i^2 (i=1,2,3)$ 表示白噪声强度, $B_i(t) (i=1,2,3)$ 表示定义于完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的标准 Brownian 运动。

一、准备知识

此节首先给出本文中所需的定义。

定义 1^[8] (随机持久性) 如果对于 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, 存在一组正数 $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ 和 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得任意的初始值 $X(0) = (x(0), y(0), z(0)) \in R_+^3$, 方程 (2) 的解 $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 满足

$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \geq \alpha\} \geq 1 - \varepsilon, \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq \delta\} \geq 1 - \varepsilon$,
则方程 (2) 是随机持久的。

定义 2^[9] (随机最终有界) 如果对于 $\forall \varepsilon \in (0,1)$ 存在正数 $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, 使得方程 (2) 的解 $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 满足

$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) > \alpha\} < \varepsilon$,
则方程 (2) 是随机最终有界的。

基金项目: 安徽新华学院校级重点自然科学基金项目 (2024zr009), 安徽新华学院校级自然科学基金项目 (2025zrqyb17), 安徽新华学院博士科研基金 (bs2025kyqd006), 安徽新华学院校级重点自然科学基金项目 (2026zrqdz14)。

作者简介: 储著松 (1993-), 男, 汉族, 安徽安庆人, 硕士研究生, 讲师, 研究方向: 微分方程。

同时, 本文的讨论是建立在以下条件的基础上: R_+, R_+^3 分别表示非负实数集和三维欧氏向量空间中正的部分。

二、系统 (2) 解的性质

引理 1 模型 (2) 对于给定的任意初值 $x(0) > 0, y(0) > 0, z(0) > 0$, 存在唯一的局部正解 $(x(t), y(t), z(t)), t \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 表示爆炸时间。

证明: 当 $t \geq 0$ 时, 考虑下述方程

$$\begin{cases} d\mu = [c_1(1-p\mu-v-\zeta) - c_3\zeta - m_1 - 0.5\sigma_1^2]dt + \sigma_1 dB_1(t) \\ dv = [qc_2(1-p\mu-v-\zeta) + pc_2\mu - c_3\zeta - m_2 - 0.5\sigma_2^2]dt + \sigma_2 dB_2(t) \\ d\zeta = [c_3(p\mu+v) - m_3 - 0.5\sigma_3^2]dt + \sigma_3 dB_3(t) \end{cases}$$

因为上述方程的系数满足局部 Lyapunov 条件, 故在 $[0, \tau_e)$ 上存在唯一的局部解 $(\mu(t), v(t), \zeta(t))$. 再由 Itô 公式可知, $x(t) = e^{\mu(t)}, y(t) = e^{v(t)}, z(t) = e^{\zeta(t)}$ 为原系统 (2) 满足初始条件的解。

定理 1 系统 (2) 对于给定的任意给初值 $(x(0), y(0), z(0)) \in R_+^3$, 存在唯一的解 $(x(t), y(t), z(t)), t \geq 0$, 且此解依概率 1 停留在 R_+^3 。

证明: 由引理 1 可知系统 (2) 在 $[0, \tau_e)$ 时间内存在唯一的局部解。下证此解是全局的, 故只需证 $\tau_e = +\infty$. 令 $n_0 > 0$ 且充分大, 使得 x_0, y_0, z_0 全存于在区间 $\left[\frac{1}{n_0}, n_0\right]$. 对于整数 $n \geq n_0$, 定义停时

$$\tau_n = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : x(t) \notin \left(\frac{1}{n}, n\right), \text{或 } y(t) \notin \left(\frac{1}{n}, n\right), \text{或 } z(t) \notin \left(\frac{1}{n}, n\right) \right\}.$$

显然当 $n \rightarrow +\infty$ 时, τ_n 是单调增加的。设 $\tau_{+\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$, 有 $\tau_{+\infty} \leq \tau_e$ 几乎处处成立。下证 $\tau_{+\infty} = +\infty$ 即可。否则存在常数 $T > 0, \varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$. 所以存在整数 $n_1 \geq n_0$, 使得

$$P\{\tau_n \leq T\} > \varepsilon, n \geq n_1. \quad (3)$$

定义一个 C^2 函数 $V_1: R_+^3 \rightarrow R_+$,

$$V_1(X) = x - 1 - \ln x + y - 1 - \ln y + z - 1 - \ln z.$$

当 $n > 0$ 时, 有 $n - 1 - \ln n > 0$, 所以 $V_1(X)$ 是非负的。若 $(x(t), y(t), z(t)) \in R_+^3$, 则有

$$\begin{aligned} dV_1 = & [c_1(1-px-y-z) - c_3z - m_1](x-1) + [qc_2(1-px-y-z) + pc_2x - c_3z \\ & - m_2](y-1) + [c_3(px+y) - m_3](z-1) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)dt \\ & + \sigma_1(x-1)dB_1(t) + \sigma_2(y-1)dB_2(t) + \sigma_3(z-1)dB_3(t). \end{aligned}$$

因此, 有:

$$\begin{aligned} LV_1 = & [c_1(1-px-y-z) - c_3z - m_1](x-1) + [qc_2(1-px-y-z) + pc_2x - c_3z \\ & - m_2](y-1) + [c_3(px+y) - m_3](z-1) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \\ & \leq -pc_1x^2 - qc_2y^2 - (c_1 + pqc_2 - pc_2)xy - (c_1 + c_3 - pc_3)xz - qc_2yz \\ & + (c_1 - m_1 + pc_1 + pqc_2 - pc_2 - pc_3)x + (c_1 - c_3 - m_2 + 2qc_2)y \\ & + (c_1 + qc_2 + 2c_3 - m_3)z + (m_1 + m_2 + m_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \\ & \leq M. \end{aligned}$$

M 是正常数。即

$$\begin{aligned} dV_1 = & LV_1dt + \sigma_1(x-1)dB_1(t) + \sigma_2(y-1)dB_2(t) + \sigma_3(z-1)dB_3(t) \\ & \leq Mdt + \sigma_1(x-1)dB_1(t) + \sigma_2(y-1)dB_2(t) + \sigma_3(z-1)dB_3(t). \end{aligned}$$

上式两端同时由 0 到 $\tau_n \wedge T$ 积分并取期望得

$$EV_1(x(\tau_n \wedge T), y(\tau_n \wedge T), z(\tau_n \wedge T)) \leq V_1(x(0), y(0), z(0)) + MT. \quad (4)$$

令 $\Omega_n = \{\tau \leq T\}, n \geq n_1$, 由不等式 (3) 得 $P(\Omega_n) \geq \varepsilon$. 因此对于 $\forall \omega \in \Omega_n$, 存在 $x(\tau_n, \omega)$ 或 $y(\tau_n, \omega)$ 或 $z(\tau_n, \omega)$ 之一等于 $\frac{1}{n}$ 或 n . 所以

$$V_1(x(\tau_n, T), y(\tau_n, T), z(\tau_n, T)) \geq \min \left\{ \left(\frac{1}{n} - 1 + \ln n \right), n - 1 - \ln n \right\}.$$

再由式 (4) 可得

$$\begin{aligned} V_1(x(0), y(0), z(0)) + MT & \geq E[1_{\Omega_n}(\omega)V_1(x(\tau_n, \omega), y(\tau_n, \omega), z(\tau_n, \omega))] \\ & \geq \varepsilon \min \left\{ \left(\frac{1}{n} - 1 + \ln n \right), n - 1 - \ln n \right\}, \end{aligned}$$

$1_{\Omega_n}(\omega)$ 是 $\Omega_n(\omega)$ 的指标函数. 令 $n \rightarrow +\infty$, 则有

$$+\infty > V_1(x(0), y(0), z(0)) + MT \geq +\infty$$

矛盾, 故定理得证。

定理 2 在系统 (2) 中, 对于任意的初值 $(x(0), y(0), z(0)) \in R_+^3$, 其解是随机最终有界的。

证明: 由定理 1 可知, 系统 (2) 的解 $(x(t), y(t), z(t))$ 依概率 1 停留在 $R_+^3, \forall t \geq 0$. 定义 Lyapunov 函数

$$V_2 = e^t x^\alpha + e^t y^\alpha + e^t z^\alpha, (x, y, z) \in R_+^3, \alpha > 0,$$

运用 Itô 公式, 计算得

$$\begin{aligned} dV_2 = & \{e^t x^\alpha + \alpha e^t x^{\alpha-1}[c_1x(1-px-y-z) - c_3xz - m_1x] + 0.5\sigma_1^2\alpha(\alpha-1)e^t x^{\alpha-2}\}dt \\ & + \sigma_1\alpha e^t x^{\alpha-1}dB_1(t) + \{e^t y^\alpha + \alpha e^t y^{\alpha-1}[qc_2y(1-px-y-z) + pc_2xy - c_3yz - m_2y] \\ & + 0.5\sigma_2^2\alpha(\alpha-1)e^t y^{\alpha-2}\}dt + \sigma_2\alpha e^t y^{\alpha-1}dB_2(t) + \{e^t z^\alpha + \alpha e^t z^{\alpha-1}[c_3z(px+y) \\ & - m_3z] + 0.5\sigma_3^2\alpha(\alpha-1)e^t z^{\alpha-2}\}dt + \sigma_3\alpha e^t z^{\alpha-1}dB_3(t) \\ & \leq e^t \{(1+c_1\alpha-m_1)x^\alpha - pc_1\alpha x^{\alpha+1} + (pc_2+pc_3-pqc_2)x^2 + 0.5\sigma_1^2\alpha(\alpha-1)x^\alpha \\ & + (1+qc_2\alpha-m_2\alpha)y^\alpha - qc_2\alpha y^{\alpha+1} + c_3y^2 + (pc_2-pqc_2)y^{2\alpha} + 0.5\sigma_2^2\alpha(\alpha-1)y^\alpha \\ & + (1-m_3\alpha)z^\alpha + (pc_3+c_3)z^{2\alpha} + 0.5\sigma_3^2\alpha(\alpha-1)z^\alpha\}dt + \sigma_1\alpha e^t x^{\alpha-1}dB_1(t) \\ & + \sigma_2\alpha e^t y^{\alpha-1}dB_2(t) + \sigma_3\alpha e^t z^{\alpha-1}dB_3(t) \\ & \leq K e^t dt + \sigma_1\alpha e^t x^{\alpha-1}dB_1(t) + \sigma_2\alpha e^t y^{\alpha-1}dB_2(t) + \sigma_3\alpha e^t z^{\alpha-1}dB_3(t), \end{aligned}$$

K 是一个正常数。因此

$$e^t E(x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha) - E(x^\alpha(0) + y^\alpha(0) + z^\alpha(0)) \leq K e^t,$$

于是

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} E(x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha) < +\infty,$$

又 $\forall X(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in$ 因为 $|X(t)|^\alpha \leq 3^{\frac{\alpha}{3}}(x^\alpha(t) + y^\alpha(t) + z^\alpha(t))$, 所以

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} E|X(t)|^\alpha < +\infty.$$

再利用 Chebyshev 不等式, 定理 2 得证。

三、结语

在生态种群模型中，考虑环境噪声因素的影响，给出了新的

随机种群模型，分析了该模型全局正解的存在性与唯一性，同时证明正解的随机有界性，对于研究和维持生态系统平衡具有重要意义。

参考文献

[1] 陈兰荪, 孟新柱, 焦建军. 生物动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[2] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究 [M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.

[3] ZHANG Z F, DING T R, HUANG W Z, et al. Qualitative theory of differential equations[M]. Providence: American Mathematical Society, 1991.

[4] 刘娟, 吴延敏. 一类具有饱和和恢复率的随机 SIR 传染病模型的持久性 [J]. 廊坊师范学院学报 (自然科学版), 2024, 24(3): 5-8.

[5] 艾晓辉, 邓文波, 李鹏喆. 一类随机 Amensalism 种群模型的动力学行为 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2022, 27(3): 140-146.

[6] LIU X Q, ZHONG S M, TIAN B D, et al. Asymptotic properties of a stochastic predator-prey model with Crowley-Martin functional response[J]. J Appl Math Comput, 2016, 43(1): 479-490.

[7] LI Z X, MU Y, XIANG H L, et al. Mean persistence and extinction for a novel stochastic turbidostat model[J]. Nonlinear Dyn, 2019, 97: 185-202.

[8] LI X Y, MAO X R. Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka-Volterra competitive system with random perturbation[J]. Discrete Contin Dyn Syst Ser A, 2009, 24(2): 523-593.