基于滑模控制的分数阶复 Volta 系统投影同步及应用

李娇，张俊芳，张美花
云南开放大学人工智能应用技术学院，云南 昆明 650000

DOI: 10.61369/RTED.2026110040

摘　　要： 本文针对分数阶复混沌系统在保密通信中的高维加密需求，提出一种基于滑模控制的复数投影同步方法。通过设计复数域非线性滑模控制器和自适应趋近律，结合分数阶稳定性理论和复函数分析法，提出分数阶复 Volta 系统并实现了与异结构分数阶 Liu 系统按指定比例因子的投影同步。构建了分数阶复 Volta 系统与分数阶复 Liu 系统的异结构同步模型，设计了适用于复数域的加密函数，并通过数值仿真验证了方法的有效性。结果表明，复数比例因子可扩展信号加密维度，同步误差模长在有限时间内收敛至零，显著提升了保密通信的抗干扰能力。

关 键 词： 分数阶复 Volta 系统；滑模控制；投影同步；保密通信

Projective Synchronization of Fractional-order Complex Volta Systems Based on Sliding Mode Control and Its Application

Li Jiao, Zhang Junfang, Zhang Meihua
Artificial Intelligence Application Technology Department, Yunnan Open University, Kunming, Yunnan 650000

Abstract: To address the high-dimensional encryption requirements of fractional-order complex chaotic systems in secure communication, this paper proposes a complex projective synchronization method based on sliding mode control. By designing a nonlinear sliding mode controller and an adaptive reaching law in the complex domain, and combining complex function analysis with fractional-order stability theory, we introduce the fractional-order complex Volta system and achieve projective synchronization with the heterogeneous fractional-order Liu system according to specified complex scale factors. A heterogeneous synchronization model between the fractional-order complex Volta system and the fractional-order complex Liu system is constructed. An encryption function suitable for the complex domain is designed, and the effectiveness of the method is verified through numerical simulations. The results demonstrate that the complex scale factor expands the signal encryption dimension, the modulus of the synchronization error converges to zero within a finite time, and the anti-interference capability of secure communication is significantly enhanced.

Keywords: fractional-order; complex volta system; sliding mode control; projective synchronization secure; communication

引言

分数阶复混沌系统属于典型的复动力系统，也是一类复杂的非线性系统[1]。其中，复 Volta 系统作为典型的高维混沌模型，其分数阶形式的动力学行为更为复杂，但现有研究多采用实数域控制策略[2]，未能充分利用复 Volta 系统的复数特性提升同步性能。为此，本文提出一种改进型复滑模控制器，通过设计复数域滑模面，实现分数阶复 Volta 系统的快速投影同步，并探索其在保密通信中的应用价值。

一、系统数学模型、控制器设计与稳定性分析

(1) 分数阶复 Volta 系统建模：

本文提出的分数阶复 Volta 系统是传统分数阶 Volta 系统的复数域扩展，其状态变量包含实部与虚部，定义如下：

$$\begin{aligned}\frac{d^q x_1}{dt^q} &= -x_1 - a x_2 - x_3 \bar{x}_2,\\ \frac{d^q x_2}{dt^q} &= -x_2 - b x_1 - x_1 \bar{x}_3,\\ \frac{d^q x_3}{dt^q} &= c x_3 + x_1 \bar{x}_2 + 1.\end{aligned} \tag{1}$$

项目信息：云南开放大学云南国防工业职业技术学院科学研究基金项目资助 -- 分数阶混沌系统同步及其在保密通信中的应用研究（24YNOU50）。
作者简介：李娇（1986—），女，研究方向：混沌系统控制，软件工程。

 Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

其中，q 为导数的阶，a，b，c 为系统复参数，$\bar{x}_2$，$\bar{x}_3$表示 x_2，x_3的共轭复数。当 a=11+0.5i，b=3−0.2i，c =0.73+ 0.1i，系统状态初始值 $x_1(0)=8+0.5i$，$x_2(0)=2-0.3i$　$x_3(0)=1+0.2i$，阶数 q=0.98时，步长为0.005，运用数值仿真可得系统系统复空间内各个状态变量的吸引子如图1所示，（a）x_1、x_2的实部，（b）x_1、x_2的虚部，（c）x_1、x_2、x_3的实部，（d）x_1、x_2、x_3的虚部，由此可见系统（1）为混沌系统。

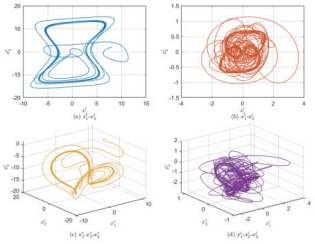


图1 分数阶复 Volta 系统各平面投影和混沌吸引子

(2) 分数阶复系统稳定性理论 [3]：

考虑任一分数阶系统：$\frac{d^q x}{dt^q}=Px$，其中，0<q<1，P ∈ C^{nxn} 是系统的参数矩阵，PH 表示 P 的转置共轭矩阵，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为复状态向量，如果 P+PH 的特征值都为负数，那么分数阶系统 $\frac{d^q x}{dt^q}=Px$ 的零点是渐近稳定的，即有 $\lim_{t\to\infty} x=0$。

(3) 投影同步系统数学模型以及问题描述 [4]

考虑一个由如下数学模型描述的 n 维分数阶复混沌系统：

$\frac{d^q x}{dt^q}=Ax+f(x)$，其中 q 为阶数，且0<q<1，A ∈ C^{nxn}，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ ∈ C^{nxn} 为系统的状态变量向量，Ax 代表了系统的线性特征，$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^T$ 为关于状态变量的非线性函数向量。

将上述系统作为驱动系统，构造如下形式的响应系统：

$\frac{d^q y}{dt^q}=By+g(y)+u$，其中 q 为阶数，且0<q<1，B ∈ C^{nxn}，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ ∈ C^{nxn} 为系统的状态变量向量，By 代表了系统的线性特征，$g(y)=(g_1(y),g_2(y),\cdots,g_n(y))^T$ 为关于状态变量的非线性函数向量，$u=(u_1,u_2,\cdots u_n)^T$ 为控制器。

投影同步误差数学模型为 $e=y-hx$，其中 h 为尺度因子，$e=(e_1,\ e_2\ \cdots\ e_n)^T$ 为误差向量，相应地，误差动态系统可表示为：

$$\begin{aligned}\frac{d^q e}{dt^q}&=\frac{d^q y}{dt^q}-h\frac{d^q x}{dt^q}\\&=By+g(y)+u-hAx-hf(x)\\&=Be+G(x,y)+u,\end{aligned}\tag{2}$$

其中，$G(x,y)=g(y)-hf(x)+h(B-A)x$。本文的控制目标就是设计一个合适的控制器 u，使得 $\lim_{t\to\infty} e=0$。

(4) 基于滑模控制原理的控制器设计与分析

①依据滑模控制理论的核心思想 [5]，考虑对误差动态方程 (2) 中的非线性项 G(x, y) 进行补偿。为此，设计控制器 $u=H(t)-G(x,y)$，滑模面定义为 $s(e)=Ce$ [6]，其中，C=[C1,C2,...,Cn] 是常数向量。选取指数趋近律 $\frac{d^q s}{dt^q}=-p\,\mathrm{sgn}(s)-rs$ 作为到达律 [7]，其中 sgn(*) 为符号函数，系数 p > 0，r > 0。可得控制器表达式

$$u=-K\frac{C(rI+A)e+p\,\mathrm{sgn}(s)}{CK}-G(x,y).$$

②稳定性分析

为验证误差系统从任意初始条件出发能否在有限时间内到达滑模面，需满足滑模到达条件。构造如下 Lyapunov 函数：$V=1/2s^2$，则 $\dot{V}=s\dot{s}=-ps\,\mathrm{sgn}(s)-rs^2$，由于 $s\,\mathrm{sgn}(s)>0, r>0, p>0$，得到 $\dot{V}=s\dot{s}<0$（当 s ≠ 0 时），根据有限时间稳定性理论 [8]，系统状态将在有限时间内收敛到滑模面。

进一步验证滑动模态的稳定性。当系统进入滑模面时，s(e)=0 且 $\frac{d^q s}{dt^q}=0$，此时误差系统可写为：

$$\begin{aligned}\frac{d^q e}{dt^q}&=Be+Kw(t)=Be-K\frac{C(rI+B)e+p\,\mathrm{sgn}(s)}{CK}\\&=[B-K\frac{C(rI+B)}{CK}]e-K\frac{p\,\mathrm{sgn}(s)}{CK}\end{aligned}\tag{3}$$

将 $-K\frac{p\,\mathrm{sgn}(s)}{CK}$ 看作是线性分数阶误差系统的输入，通过设计 C、K，使得 $[B-K\frac{C(rI+B)}{CK}]$ + $[B-K\frac{C(rI+B)}{CK}]$ H 的特征值满足负定性条件，从而保证 $\lim_{t\to\infty} e=0$。

二、数值仿真试验

将设计的滑模控制器应用于以异结构分数阶复 Volta-Liu 系统进行数值仿真，具体如下：

以分数阶复 Liu 系统作为驱动系统 [9]：

$$\begin{aligned}\frac{d^q x_1}{dt^q}&=\alpha(x_2-x_1),\\\frac{d^q x_2}{dt^q}&=\beta x_1-x_1\bar{x}_3,\\\frac{d^q x_3}{dt^q}&=-\gamma x_3+\delta x_1\bar{x}_1\end{aligned}\tag{4}$$

其中，q 为导数的阶0.98，α，β，γ，λ 为系统复参数，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_3$表示 x_1，x_3的共轭复数。当 α =10+0.2i，β =40−0.3i，γ =2.5+ 0.2i，λ =4+ 0.3i，状态初始值 $x_1(0)=0.8+0.2i$，$x_2(0)=0.2+0.1i$　$x_3(0)=0.1+0.05i$，运用数值仿真可得系统系统复空间内各个状态变量的吸引子如图2所示，（a）x_1、x_2的实部，（b）x_1、x_2的虚部，（c）x_1、x_2、x_3的实部，（d）x_1、x_2、x_3的虚部，由此可见系统（4）为混沌系统。

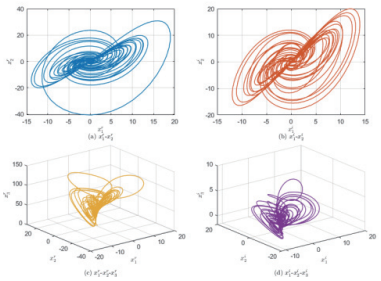


图2 分数阶复 Liu 系统各平面投影和混沌吸引子

Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

响应系统为受控分数阶复Volta系统(4)。选取 $C=[1\ -1\ -1]$, $K=[-2\ -4\ 1]^T$， $r=25$， $p=0.2$，Volta系统参数a=11+0.5i，b=3−0.2i，c =0.73+ 0.1i，Liu系统参数 α=10， β=40， γ= 2.5， λ=4，系统阶次均取为q=0.98，取驱动系统初值为0.8+0.2i，0.2+0.1i，0.1+0.05i，分别取h1=−0.5；h2=−1；h3=2使用MatlabR2023b进行仿真，图3给出了h=−0.5时的误差曲线，其中，(a)和(d)分别为同步误差e1的实部与虚部响应曲线，(b)和(e)分别为同步误差e2的实部与虚部响应曲线，(c)和(f)则分别为同步误差e3的实部与虚部响应曲线。图4 (a)和(b)为h=−0.5时的同步相图，(c)和(d)为h=2时的同步相图。

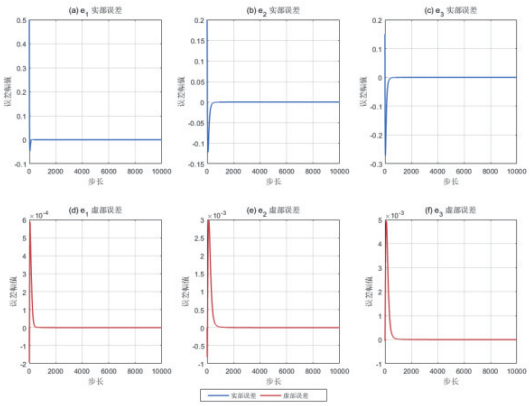


图3 h=0.5时投影同步误差曲线

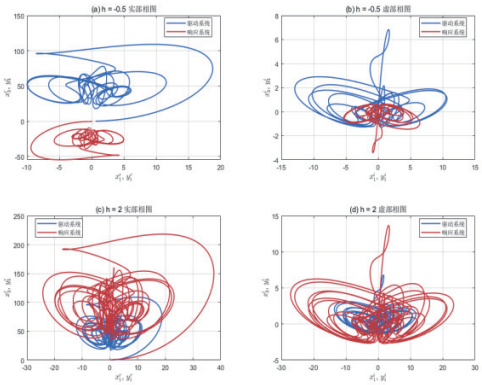


图4 分数阶复Volta-Liu系统投影同步相图

图3所示的投影同步误差曲线清晰地表明驱动系统与响应系统所有状态变量的实部与虚部同步误差均在有限时间内快速收敛至零附近的一个极小邻域内。从图4的相图对比中可以明显看出，响应系统与驱动系统在不同比例因子下均保持了完全一致的混沌动力学特征。当 h = −0.5 时，响应系统状态的幅值约为驱动系统状态幅值的0.5倍且相位相反；而当 h= 2 时，响应系统状态的幅值扩大为驱动系统的2倍且相位相同。仿真结果表明，本文所设计的滑模控制器能够有效地克服分数阶复数系统的非线性特性，实现驱动系统与响应系统在不同比例因子下的精确投影同步，且同步过程具有收敛速度快、鲁棒性强的特点。

三、结语

本文针对分数阶复混沌系统在保密通信中的高维加密需求[10]，提出一种基于滑模控制的复数投影同步方法。通过设计复数域非线性滑模控制器和自适应趋近律，结合复函数分析法和分数阶稳定性理论，提出分数阶复Volta系统并实现了与异结构分数阶Liu系统按指定比例因子的投影同步，证实了该控制器的有效性并说明在保密通信中的应用。

参考文献

[1] 田小敏，杨忠．分数阶系统分析与控制研究 [M]. 电子工业出版社：2021.

[2] 王东晓，李自强．Volta's 混沌系统自适应滑模同步 [J]. 周口师范学院学报，2022,39(2):1-5.DOI:10.13450/j.cnki.jzknu.2022.02.001.

[3] 李梅．分数阶复混沌系统的同步及应用研究 [D]. 河北师范大学，2021.DOI:10.27110/d.cnki.ghsfu.2021.001382.

[4] 邵克勇，蒋卢杰，王婷婷．不同维分数阶混沌预设时间有限时间投影同步 [J]. 计算技术与自动化，2022,41(1):28-33.DOI:10.16339/j.cnki.jsjsyzdh.202201006.

[5] 江巧晴，张付臣，肖敏．一个新混沌系统的复杂性分析与同步控制 [J]. 浙江大学学报(理学版)，2026,53(3):347-354.

[6] 毛北行，王东晓．分数阶大气混沌系统滑模同步的4个充分条件 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2023,61(6):1448-1456.DOI:10.13413/j.cnki.jdxblxb.2022435.

[7] 崔俊琦．分数阶非线性系统的滑模控制方法研究 [D]. 郑州轻工业大学，2025.DOI:10.27469/d.cnki.gzzqc.2025.000012.

[8] 杨喜平，毛北行．不确定分数阶超混沌 Tang 系统的有限时间滑模同步 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2023,47(6):29-36.

[9] 颜闽秀，接敬锋．新分数阶混沌系统的电路仿真及自适应滑模控制 [J]. 数学的实践与认识，2024,54(8):237-247.DOI:10.20266/j.math.2024.08.019.

[10] 蒋逢灵，刘贤群，邓景新，等．分数阶混沌系统同步及其在保密通信中的应用 [J]. 长江信息通信，2023,36(11):58-62.

 Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.