偏微分方程在图像处理中的典型应用模型综述

袁萍
长江大学文理学院 数学与医护系，湖北 荆州 434020

DOI: 10.61369/TACS.2026080009

摘　　要： 偏微分方程方法进行图像处理是图像技术的重要数学工具之一，借助于偏微分方程可以将离散的图像数据映射到连续域进行演化分析，进而解决图像去噪、分割、修复及增强等问题。本文综述了偏微分方程在图像处理中的四个典型应用模型：基于各向异性扩散的 Perona-Malik 方程及其改进模型、基于几何活动轮廓的水平集方法、基于变分法的 Mumford-Shah 泛函与基于传输机制的图像修复模型。在此基础上深入剖析了各模型的数学构造、物理意义及优缺点，并展望了 PDE 方法与前沿趋势。

关 键 词： 偏微分方程；水平集方法；变分法；图像修复

A Review of Typical Application Models of Partial Differential Equations in Image Processing

Yuan Ping
Department of Mathematics and Health Care, Yangtze University College of Arts and Sciences, Jingzhou, Hubei 434020

Abstract: Partial differential equation (PDE) methods serve as fundamental mathematical tools in modern image processing. By mapping discrete image data into the continuous domain for evolutionary analysis, PDE-based approaches effectively address tasks such as image denoising, segmentation, inpainting, and enhancement. This paper reviews four typical categories of PDE application models in image processing: the Perona-Malik equation and its improved variants based on anisotropic diffusion, level set methods rooted in geometric active contours, the Mumford-Shah functional derived from variational methods, and image inpainting models driven by transport mechanisms. Building on this, the paper provides an in-depth analysis of the mathematical formulation, physical significance, and respective advantages and limitations of each model, followed by an outlook on the future development of PDE methods and emerging frontier trends.

Keywords: partial differential equations; level set method; variational methods; image inpainting

引言

人类感知世界、获取信息最重要的载体之一就是图像，图像的质量直接决定了后续的特征提取、模式识别、目标检测及计算机视觉任务的效果和精度。在图像的获取、传输和存储过程中，不可避免地会受到噪声污染、模糊退化或局部缺损的影响，如传感器噪声、光学衍射、如信道干扰、压缩失真等。因此如何从退化的观测数据中恢复出高质量、高保真的图像，一直是图像处理领域亟待解决的重要课题。 传统的图像处理方法多利用线性卷积滤波、非线性形态学操作等离散数学工具。这些方法虽然计算简便、易于实现，但面对具有复杂几何结构和非线性特征的图像时，处理上难以兼顾平滑去噪与边缘保持，图像容易出现边缘模糊或伪影。

随着20世纪80年代以来计算数学与数值分析的快速发展，偏微分方程（PDE）被引入图像处理领域，在处理上转变为“连续域演化”。PDE 方法把图像看成定义在二维空间 上的连续亮度函数，通过建立特定的演化方程，模拟热传导、流体动力学或几何形变等物理过程，利用迭代计算的方法实现提取图像特征、增强与恢复图像。PDE 方法在图像处理中具有优势明显：PDE 方法具有坚实的数学基础，许多 PDE 模型可以推导自变分原理并通过欧拉—拉格朗日方程建立联系，这样能保证能量泛函极小化解的存在性与稳定性。PDE 还能够自然地处理图像的几何特征，比如曲率、法向量、梯度流等，适合保持边缘、分析纹理和描述形状。除此之外，PDE 模型还具有较好的拓扑自适应性，特别是水平集方法能够自动处理演化曲线的分裂与合并，无需人工干预。本文将围绕去噪、分割、修复三大问题 ，详细综述该领域具有代表性的典型应用模型及其数学机理。

项目信息：湖北省教育厅科学研究计划指导性项目“基于偏微分方程的模糊图像增强算法研究”（编号 B2023446）。
作者简介：袁萍（1984.04—），女，汉族，湖北潜江人，硕士，副教授，研究方向：数学建模 、计算机数学应用、偏微分方程。

 Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

一、图像去噪模型

图像处理的最基础的一环是图像去噪，处理图像时希望去除噪声的同时尽可能保留图像的边缘、纹理等细节。传统的线性高斯滤波虽然能有效去除高斯白噪声，但其本质是各向同性的热传导过程，扩散系数是常数，平滑噪声的同时不可避免地会模糊图像的边缘和细节。为了解决这一问题，Perona 和 Malik 于1990年提出了各向异性扩散模型 Perona-Malik 方程。Perona-Malik（P-M）模型是通过引入一个与图像梯度模值相关的非线性扩散系数函数 $g(|\nabla I|)$，使扩散过程具有方向选择性，在平坦、梯度小的图像内部表现为强平滑，而在梯度大的边缘处表现为弱平滑甚至停止扩散。其演化方程定义为：

$$\frac{\partial I}{\partial t}=div(g(|\nabla I|)\nabla I)\ ,$$

其中 $I(x,y,t)$ 是演化过程中的图像，t 为伪时间参数，∇I 为图像梯度，div 为散度

算子。$g(s)$ 是扩散系数函数，通常满足 $g(s)\geq 0$ 且单调递减，常用的形式有：$g_1(|\nabla I|)=exp\left(-\left(\frac{|\nabla I|}{K}\right)^2\right)$，$g_2(|\nabla I|)=\frac{1}{1+(|\nabla I|/K)^2}$，

其中 K 为对比度参数（阈值），用于控制边缘检测的灵敏度。

从物理角度看，P-M 方程是一个非线性热传导方程。当 $|\nabla I\ll K$ 时，$g\approx 1$，方程近似于线性热传导方程 $\partial I/\partial t=\Delta I$，进行各向同性扩散以去除噪声；当 $|\nabla I\gg K$ 时，$g\approx 0$，扩散被抑制，从而保护边缘不被模糊。从空间理论来看，P-M 方程生成了一个非线性尺度空间。随着时间 t 的增加，图像中的细节由细到粗逐渐消失，但主要结构特征得以保留。尽管 P-M 模型应用广泛，但数学分析表明该方程在特定条件下是“病态”的（ill-posed），可能导致“阶梯效应”，即平滑区域出现类似楼梯的块状伪影。为了解决这一问题，Catt é 等人提出了正则化的 P-M 模型，利用高斯平滑后的梯度 ∇I_σ 来控制扩散系数：

$$\frac{\partial I}{\partial t}=div(g(|\nabla I_\sigma)\quad I)\ ,$$

这一改进既保证了方程解的存在性与唯一性，又提高了抗噪性能。此外，基于总变分（ TV）的 ROF 模型也是一种经典的改进，它利用 L_1 范数正则化，在去噪的同时更好地保持边缘，避免了过度平滑。

二、图像分割模型

图像分割的目标是将图像划分为语义各异且互不重叠的区域，是计算机视觉中的关键环节。基于 PDE 的几何活动轮廓模型，水平集方法（Level Set method）是处理此类问题的有力手段。

（一）参数活动轮廓与几何活动轮廓

早期的 Snake 模型（参数活动轮廓）通过能量最小化驱动曲线变形以拟合边缘。然而，Snake 模型难以处理曲线的拓扑变化（如分裂与合并），且对初始位置敏感，容易陷入局部极小值。Osher 和 Sethian 提出的水平集方法将二维曲线演化问题嵌入到三维曲面演化中，通过求解高维 PDE 来隐式地表示曲线，完美解决了拓扑自适应问题。

在水平集框架下，演化曲线被定义为高一维水平集函数 $\varphi(x,y,t)$ 的零水平集，即 $\Gamma(t)=\{(x,y)\}|\varphi(x,y,t)=0$，曲线随时间演化的过程可以转化为水平集函数满足的偏微分方程演化过程。根据演化方程的构造方式不同，活动轮廓模型通常分为参数活动轮廓与几何活动轮廓两类：参数活动轮廓直接以参数化形式表示曲线，通过最小化能量泛函得到曲线的变形速度；几何活动轮廓则基于曲线的几何特性（如法向速度、曲率）构造演化方程，结合水平集方法实现隐式演化，其中曲线的演化仅依赖自身的几何度量，不依赖参数化表示，因此天然适配水平集的隐式表达框架，能够自动适应曲线拓扑结构的变化，避免了参数活动轮廓需要重新参数化的额外计算开销。

（二）测地线活动轮廓模型

测地线活动轮廓（Geodesic Active Contours，GAC）模型是水平集方法的代表性应用，旨在寻找一条 C 位于图像边缘且长度最短的曲线。其能量泛函定义为：

$$E(C)=\int_0^1 g(|\nabla I(C(\mathrm{q}))|)|C'(\mathrm{q})|dq,\ ,$$

其中 g 为边缘指示函数，在边缘位置趋近于0。通过梯度下降流推导并进一步转化为水平集函数 $\varphi(x,y,t)$ 的偏微分方程：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=g|\nabla\varphi|\ div\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right)+\langle\nabla g,\nabla\varphi\rangle\ ,$$

该方程第一项为用于平滑曲线的曲率项，；第二项为促使曲线向边缘移动的测地线曲率项；第三项为加速曲线在边缘处停止的梯度项。

和较传统的活动轮廓模型相比，GAC 模型引入图像全局梯度信息来引导曲线演化，并且依靠水平集的隐式表达自动处理拓扑变化，不需要预先参数化曲线，所以对模糊边缘的捕获能力更强。不足之处是该模型仅依靠图像的梯度边缘信息来引导演化，对于边缘不清晰或存在强噪声干扰的图像容易出现曲线过度演化，或者演化提前停止导致无法到达目标边界的问题。与此同时，模型的计算过程中需要对水平集函数重新初始化，这样就增加了额外的计算量。

（三）C-V 模型与区域信息

鉴于 GAC 模型主要依赖梯度信息，在弱边缘或噪声干扰下分割效果有限，Chan 和 Vese 提出了不依赖梯度的 C-V 模型，此模型借助图像区域的均值实现分割。其能量泛函为：

$$E^{CV}(c_1,c_2,C)=\lambda_1\int_{\Omega_{in}}|I-c_1|^2dx+\lambda_2\int_{\Omega_{out}}|I-c_2|^2dx+\nu|C|$$

其中 c_1,c_2 分别为曲线内外区域的灰度均值。C-V 模型可有效检测梯度不显著的边缘且对噪声更具鲁棒性，但计算复杂度较高，易陷入局部极小值。为了降低计算复杂度并提升分割精度，后续研究者对 C-V 模型开展了诸多改进，其中最具代表性的是优化窄带水平集，仅对零水平集附近的窄带区域内的水平集函数进行迭代更新，无需更新整个图像域的函数值，大幅减少了计算量，提升了模型的处理效率。

Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

三、图像修复与复原模型

为了利用受损区域的周围信息自动填补图像缺失的部分，如划痕、文字遮挡、物体移除等，往往需要进行图像修复，基于PDE的方法可以通过模拟物理传输过程完成修复。

（一）BSCB模型

Bertalmio等人提出的BSCB模型是PDE修复领域的奠基性工作。其核心思想是沿图像等照度线即灰度值相同的线将平滑区域信息传输至待修复区域，其PDE形式为：

$$\frac{\partial I}{\partial t}=\nabla^{\perp}\left(\frac{\nabla^{\perp}\Delta I}{|\nabla^{\perp}\Delta I|}\right)\nabla I$$

其中$\nabla^{\perp}$表示梯度的垂直旋转算子，能够将原有梯度旋转90°得到等照度线的方向，该方程表示信息将沿等照度线方向逐步扩散到待修复区域，从而实现缺失区域的填充。该模型也存在一定局限性，它仅依靠局部像素的几何信息进行传播，对大面积缺失区域或包含丰富纹理的修复场景容易产生模糊效果，同时迭代计算的复杂度较高，修复效率有待提升。

（二）CDD模型

Chan和Shen在BSCB模型的基础上提出了曲率驱动扩散（Curvature Driven Diffusions，CDD）模型，CDD模型依然沿等照度线方向做信息扩散，但在扩散强度中加入曲率项k，其扩散系数满足$g=g(|k|)$，且k越大扩散强度越强，进而实现断裂边缘的连接。CDD模型的PDE演化方程为：

$$\frac{\partial I}{\partial t}=\nabla\cdot\left(\frac{h(k)}{|\nabla I}\quad I\right)$$

其中k <Eqn00051.wmf>>为等照度线的曲率，$g(|k|)$为关于曲率的非减扩散系数函数，通常可选取$g(|k|)=|k|^{p}$，其中$p>0$为调节参数。相较于BSCB模型，CDD模型不仅利用了局部几何方向信息，还通过曲率约束保证了缺损区域修复后结构的连通性，对大尺度缺损的修复效果更为自然，不过该模型依然遵循各向同性的扩散逻辑，在修复包含丰富纹理的图像区域时仍难以避免模糊失真，同时迭代计算的复杂度仍较高，难以满足实时修复的应用需求。

四、Mumford-Shah泛函与图像分割

Mumford-Shah泛函从图像分段光滑的假设出发，将图像分割问题转化为能量泛函最小化问题，其核心思想是假设图像可以被划分为若干互不重叠的光滑区域，区域内部图像灰度平滑，区域边界处存在灰度突变，其能量泛函定义如下：

$$E_{MS}(u,K)=\mu^{2}\int_{\Omega\setminus K}(u-I_{0})^{2}dx+\int_{\Omega\setminus K}|\nabla u|^{2}dx+\nu|K|$$

其中Ω为整个图像域，Γ是待求解的区域边界集合，$|\Gamma|$表示所有分割边界的总长度，u是分割后得到的平滑近似图像，α，β γ为非负权重参数，分别用来调节分段光滑项、数据拟合项和边界长度项的权重。第一项保证分割得到的每个区域内部灰度变化平缓；第二项保证得到的近似图像u和原输入图像I尽可能拟合；第三项是正则项，用于控制分割边界的总长度，避免产生过度细碎的分割结果。

针对更一般的多相分割场景，研究者也提出了诸多Mumford-Shah泛函的数值求解方案，其中应用最广的是水平集逼近方法和椭圆逼近方法。比如Ambrosio和Tortorelli引入辅助变量v逼近边缘集合K，将问题转化为椭圆型PDE系统求解：

$$\begin{cases}-\Delta u+\dfrac{1}{\theta}(u-I_{0})=0\\[2ex]-\epsilon\Delta v+\dfrac{v}{4\epsilon}=\epsilon|\nabla u|^{2}\end{cases}$$

求解上述两方程可以通过交替迭代，近似获得Mumford-Shah泛函的全局极小解，此方法能同步实现图像分割与去噪，是变分图像处理的经典范例。

五、结论与展望

综上，偏微分方程已经成为图像处理领域重要的理论支撑与技术工具，在保持图像关键结构方面起到重要作用。偏微分方程法也存在一些局限性：一方面，多数传统偏微分方程模型依赖人工先验设计，对复杂纹理、高语义内容的自然图像处理效果有限，且迭代求解计算复杂度较高，难以适配大规模图像处理需求；另一方面，当前深度学习已经成为图像处理领域的主流技术，偏微分方程理论与深度学习的结合仍有待深入挖掘。未来，偏微分方程的严谨理论框架可以为深度学习模型提供可解释性与正则化约束，而深度学习也能为偏微分方程模型的参数自适应调整、数值求解加速提供新的思路，二者的结合有望推动图像处理技术进一步发展，在更多高要求的实际场景中发挥作用。

参考文献

[1] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.

[2] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12-49.

[3] Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V, et al. Image inpainting[C]//Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH). New York: ACM, 2000: 417-424.

[4] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1-4): 259-268.

[4] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577-685.

[5] Chan T F, Vese L A. Active contours without edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266-277.

[6] Ruthotto L, Haber E. Deep neural networks motivated by partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2020, 62(3): 352-364.

[7] Salamat N, Missen M M S, Prasath V B S. Recent developments in computational color image denoising with PDEs to deep learning: A review[J]. Artificial Intelligence Review, 2021, 54: 6245-6276.

[8] Li Z, Tang S, Sun T, et al. A convex level-set method with multiplicative-additive model for image segmentation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2024, 132: 587-606.

[9] 彭洪，周彬，孙燕，等. Vector-valued PDE-constrained image inpainting model[J]. 科学技术与工程，2025, 25(5): 1-12.

[10] 徐文达，温馨，毛忠旋，等. 基于偏微分方程的盲去模糊超分辨率重建算法及实验[J]. 吉林大学学报(理学版)，2025, 63(01): 35-40.

 Copyright © This Work is Licensed under A Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.