

n 重积分换元公式的一种新证法

金妤

广东理工学院 基础课教学研究部, 广东 肇庆 526100

DOI:10.61369/EIR.2026080012

摘 要 : n 元函数的可逆坐标变换虽在整体上呈现非线性特征,但在局部微元处可近似作为线性变换,基于此本文从 n 维线性空间的线性变换理论出发,首先证明了 n 维空间中的坐标变换与基变换的等价性;其次证明了线性变换的体积伸缩率公式;然后证明了可逆矩阵对应的线性变换与其转置矩阵对应的线性变换具有相等的体积伸缩率;最后在上述理论框架下,推导出 n 重积分换元公式中积分微元体积的伸缩关系,从而严谨地确立了多重积分换元法的数学表达式。

关 键 词 : 坐标变换; 基变换; 过渡矩阵; 体积伸缩率; n 重积分换元公式

A New Proof of the Transformation Formula for Multiple Integrals

Jin Yu

Basic Course Teaching Research Department, Guangdong Polytechnic College, Zhaoqing, Guangdong 526100

Abstract : Although the reversible coordinate transformation of n -variable functions exhibits nonlinear characteristics globally, it can be approximated as a linear transformation in local infinitesimal elements. Based on this, this paper starts from the theory of linear transformations in n -dimensional linear spaces. Firstly, it proves the equivalence of coordinate transformation and basis transformation in n -dimensional spaces. Secondly, it proves the volume scaling rate formula of linear transformations. Then, it demonstrates that the linear transformation corresponding to a reversible matrix and the linear transformation corresponding to its transpose matrix have equal volume scaling rates. Finally, within the theoretical framework mentioned above, it derives the scaling relationship of the volume of the infinitesimal element in the n -fold integral substitution formula, thereby rigorously establishing the mathematical expression of the multiple integral substitution method.

Keywords : coordinate transformation; basis transformation; transition matrix; volume scaling rate; n -fold integral substitution formula

引言

目前关于多重积分换元公式的证明方法已有很多种,如标准分析法^[1-2]、归纳法^[3]、外积法^[4-5]、微分形式法^[6-8]、本原变换法^[9]等,它们各具优缺点,但是本文从线性变换角度来认识多重积分换元公式,规避了繁琐的分析计算,微分同胚理论分解,复杂的拓扑结构,外积法和微分形式等抽象概念,通过线性代数结构直观揭示了换元公式中雅可比行列式作为“体积伸缩因子”的本质,为学习者理解多重积分换元公式提供了一种新的认知路径。

一、预备知识

矩阵表示为:

$$(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n) = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n) A \quad (2)$$

定义1^[10-11] 设向量组 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ 与 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的两个基, 并且有

其中,

$$\begin{cases} \vec{\beta}_1 = a_{11}\vec{\alpha}_1 + a_{21}\vec{\alpha}_2 + \dots + a_{n1}\vec{\alpha}_n \\ \vec{\beta}_2 = a_{12}\vec{\alpha}_1 + a_{22}\vec{\alpha}_2 + \dots + a_{n2}\vec{\alpha}_n \\ \dots \\ \vec{\beta}_n = a_{1n}\vec{\alpha}_1 + a_{2n}\vec{\alpha}_2 + \dots + a_{nn}\vec{\alpha}_n \end{cases} \quad (1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

支持项目: 肇庆“双百”专项(2026SBZX011)——基于优化算法的农村电商物流配送路径规划研究——以肇庆市高要区为例; 广东省高等学校教学管理学会十五规划2026年度高等教育教学改革研究课题成果(课题编号: YB202602134)。

作者简介: 金妤(1976.09-), 女, 汉族, 湖南邵东人, 硕士研究生, 广东理工学院, 副教授, 研究方向: 高等教育、数学教育。

则称 $\mathbf{A}$ 为由基 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵, (1) 式或 (2) 式就称为基变换.

注: $\mathbf{v}$ 的第 i 列就是 $\vec{\beta}_i$ 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的坐标, 从而一个基到另一个基的过渡矩阵是唯一的且是可逆的.

定义 2^[10-11] 如果 n 维线性空间中的任意向量 $\vec{v}$ 在基 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 与 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ 之下的坐标分别为

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \text{ 与 } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 为基 } \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\} \text{ 到基}$$

$\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵, 则称向量 $\vec{x}$ 和向量 $\vec{y}$ 之间的坐标关系式:

$$\vec{x} = \mathbf{A}\vec{y} \quad (4)$$

为坐标变换.

维线性空间中, 坐标变换 $\vec{x} = \mathbf{A}\vec{y}$ 与基变换 $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n) = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)\mathbf{A}$ 是等价的.

证明: 先证: 由基变换 $\Rightarrow$ 坐标变换

已知基变换为:

$$(\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n) = (\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)\mathbf{A}. \quad (5)$$

根据定义 1 和定义 2, 设 n 维线性空间中的任意向量 $\vec{v}$,

因为它在基 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 下的坐标为 $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 得到:

$$\vec{v} = y_1\vec{\beta}_1 + y_2\vec{\beta}_2 + \dots + y_n\vec{\beta}_n = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)\vec{y} \quad (6)$$

它在基 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的坐标为 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 得到:

$$\vec{v} = x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \dots + x_n\vec{\alpha}_n = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n)\vec{x} \quad (7)$$

比较 (6) 式和 (7) 式得

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n)\vec{x} = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)\vec{y} \quad (8)$$

将基变换 (5) 式代入 (8) 式右边, 得:

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n)\vec{x} = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n)\mathbf{A}\vec{y} \quad (9)$$

因为 $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ 是线性无关的 (基的性质), 所以矩阵 $(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)$ 是可逆的 (列向量线性无关), 两边左乘其逆矩阵, 得:

$$\vec{x} = \mathbf{A}\vec{y} \quad (10)$$

再证: 坐标变换 $\Rightarrow$ 基变换

已知坐标变换 $\vec{x} = \mathbf{A}\vec{y}$, 则对任意向量 $\vec{v}$, 因为它在基 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 下的坐标为 $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 它在基 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的坐标为 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 于是有:

$$(\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n)\vec{y} = (\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)\vec{x} \quad (11)$$

把坐标变换 $\vec{x} = \mathbf{A}\vec{y}$ 代入 (11) 式右边得:

$$(\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n)\vec{y} = (\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)\mathbf{A}\vec{y} \quad (12)$$

由于向量 $\vec{v}$ 是任意的, 所以向量 $\vec{y}$ 也是任意的, 故下列矩阵等式成立:

$$(\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n) = (\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)\mathbf{A} \quad (13)$$

引理 2 非零列向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \dots, \vec{\alpha}_n$ 及 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3, \dots, \vec{\beta}_n$ 构造如下:

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ dx_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\alpha}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta}_1 = \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d\xi_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\xi_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\beta}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d\xi_n \end{pmatrix}$$

它们是 n 维线性空间 V 的两个正交基, 且

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1 = a_{11}\vec{\beta}_1 + a_{21}\vec{\beta}_2 + \dots + a_{n1}\vec{\beta}_n \\ \vec{\alpha}_2 = a_{12}\vec{\beta}_1 + a_{22}\vec{\beta}_2 + \dots + a_{n2}\vec{\beta}_n \\ \dots \\ \vec{\alpha}_n = a_{1n}\vec{\beta}_1 + a_{2n}\vec{\beta}_2 + \dots + a_{nn}\vec{\beta}_n \end{cases} \quad (14)$$

用矩阵表示为:

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n) = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)\mathbf{A} \quad (15)$$

其中过渡矩阵为:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

则有下列等式成立:

$$\det(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \dots, \vec{\alpha}_n) = \det(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3, \dots, \vec{\beta}_n) \cdot |\det \mathbf{A}| \quad (17)$$

即

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |\det \mathbf{A}| \cdot d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \quad (18)$$

其中 $||$ 是绝对值符号.

证明: 令 $\mathbf{M} = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n)$, $\mathbf{N} = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)$, 于是 (14) 式或 (15) 式写成矩阵形式:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathbf{A} \quad (19)$$

显然矩阵 $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{A}$ 均可逆, 根据矩阵行列式性质:

对 (19) 式两端取行列式得:

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{N}\mathbf{A}) \quad (20)$$

于是,

$$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{N} \quad (21)$$

$$\det \begin{pmatrix} dx_1 & & & \\ & dx_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & dx_n \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \begin{pmatrix} d\xi_1 & & & \\ & d\xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d\xi_n \end{pmatrix} \quad (22)$$
$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \det A \cdot d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n. \quad (23)$$
$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |\det A| d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n. \quad (24)$$

定理 1: 设坐标变换

[illegible]

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (26)$$
$$\int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int f(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) |J| d\xi_1 \cdots d\xi_n. \quad (27)$$
$$\begin{cases} x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ \vdots \\ x_n = x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \end{cases} \quad (28)$$
$$\left\{ \begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} d\xi_n, \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} d\xi_n, \\ &\vdots \\ dx_n &= \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} d\xi_n, \end{aligned} \right. \quad (29)$$
$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \det A \neq 0 \quad (30)$$
$$\diamond \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ \vdots \\ d\xi_n \end{pmatrix}$$
$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}} \quad (31)$$
$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ dx_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}. \quad (32)$$

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d\xi_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\xi_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{\xi}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d\xi_n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

定义过渡矩阵 $\mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

构造得到 n 维空间中的一个基变换为:

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = (\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n) \mathbf{A}^T \quad (35)$$

由引理 1.1 知基变换 (36) 和坐标变换 $\vec{x} = \mathbf{A}^T \vec{y}$ 等价, 因此由引理 1.2 知在坐标变换 $\vec{x} = \mathbf{A}^T \vec{y}$ 下的体积伸缩率公式为:

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |\det \mathbf{A}^T| \cdot d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n.$$

由引理 1.3 知在坐标变换 $\vec{x} = \mathbf{A}^T \vec{y}$ 下的体积伸缩率公式也为:

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |\det \mathbf{A}^T| \cdot d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n.$$

根据上面的设法知 $|\det \mathbf{A}^T| = |\det \mathbf{A}| = |J|$,

所以 $dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |J| \cdot d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$.

于是证得 n 重积分换元公式为:

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_V f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{V'} f(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) |J| d\xi_1 \cdots d\xi_n \end{aligned} \quad (36)$$

可用完全相同的方法证明三重积分换元公式和二重积分换元公式.

定理 2 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 $\mathbf{V}$ 上连续, 若存在一个变换 $\mathbf{T}: x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$, 将 uvw 空间中的有界闭区域 $\mathbf{V}'$ 一对一地映射到 xyz 空间中的区域 $\mathbf{V}$, 且满足以下条件: $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 在 $\mathbf{V}'$ 上具有连续一阶偏导数; 变换雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, (u, v, w) \in V' \quad (37)$$

则三重积分的换元公式为:

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) (u, v, w) |J| du dv dw \end{aligned} \quad (38)$$

定理 3 设坐标变换 $\mathbf{T}: \mathbf{T}: x = x(u, v), y = y(u, v)$ 把 uv 平面上的开集 $\mathbf{G}'$ 一一映射到 xy 平面上的开集 $\mathbf{G} = \mathbf{T}(\mathbf{G}')$, $\mathbf{T}$ 具有连续偏导数, 且 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$; 又 $\mathbf{D}' \subset \mathbf{G}'$ 为有界闭集, $f(x, y)$ 为

定义在 $\mathbf{D} = \mathbf{T}(\mathbf{D}')$ 上的有界函数. 那么二重积分换元公式为:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) (u, v) |J| du dv \quad (39)$$

参考文献

- [1] 张筑生. 数学分析新讲 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2021: 180-195.
- [2] 张天德, 李勇. 数学分析典型题解与解题方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023: 412-418.
- [3] 徐森林, 薛春华. 多重积分变量代换公式的归纳证明 [J]. 大学数学, 2006, 22(2): 94-98.
- [4] 袁俊华. n 重积分换元公式的证明 [J]. 大学数学, 2013, 29(2): 126-130.
- [5] 刘伟俊. 基于格林公式的二重积分换元法教学探讨 [J]. 高等数学研究, 2024, 27(1): 56-58.
- [6] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2001: 13-18.
- [7] 陈建龙, 周建华. 多重积分变量代换公式的几何直观与严格证明 [J]. 大学数学, 2022, 38(3): 95-99.
- [8] 全国大学生数学竞赛组委会. 全国大学生数学竞赛解析与辅导 (第 5 版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2025: 305-310.
- [9] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析 (下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 385-390.
- [10] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数 (第五版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019: 260-270.
- [11] 同济大学数学系. 线性代数 (第六版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 118-125.