

定解问题结构分析视角下分离变量法的教学改进实践 ——以《数学物理方程》课程为例

王森, 马艳影, 刘彪

安徽建筑大学数理学院, 安徽 合肥 230601

DOI: 10.61369/ETR.2026210044

摘 要 : 分离变量法是《数学物理方程》课程中最基本、最重要的求解方法之一,也是学生学习过程中的重点和难点。针对学生在学习分离变量法时存在的“重步骤记忆、轻方法理解”“边界条件与本征值问题关系认识不足”“初始条件与边界条件作用混淆”等问题,本文结合《数学物理方程》课程教学实践,在梳理相关教学研究成果的基础上,提出以定解问题结构分析为主线的教学改进思路。教学中通过强化物理背景导入、显化求解流程、突出边界条件作用以及引入图像演示,构建“定解问题分析—变量分离—本征求解—系数确定”的结构化教学框架。

关 键 词 : 数学物理方程; 分离变量法; 教学改革; 定解问题; 本征值问题; 结构化教学

Teaching Improvement Practice of Separation of Variables Method from the Perspective of Structured Analysis of Well-Posed Problems— Taking the Course "Mathematical Physics Equations" as an Example

Wang Sen, Ma Yanying, Liu Biao

School of Mathematics and Physics, Anhui Jianzhu University, Hefei, Anhui 230601

Abstract : The separation of variables method is one of the most basic and important solution methods in the course "Mathematical Physics Equations", and it is also a key and difficult point for students in the learning process. Aiming at the problems existing in students' learning of the separation of variables method, such as "emphasizing step memory over method understanding", "insufficient understanding of the relationship between boundary conditions and eigenvalue problems", and "confusion between the roles of initial conditions and boundary conditions", this paper combines the teaching practice of the course "Mathematical Physics Equations" and sorts out relevant teaching research results. On this basis, it proposes a teaching improvement idea taking the structured analysis of well-posed problems as the main line. In teaching, by strengthening the introduction of physical backgrounds, clarifying the solution process, highlighting the role of boundary conditions, and introducing image demonstrations, a structured teaching framework of "well-posed problem analysis — variable separation — eigenvalue solution — coefficient determination" is constructed.

Keywords : mathematical physics equations; separation of variables method; teaching reform; well-posed problems; eigenvalue problems; structured teaching

引言

《数学物理方程》是理工科核心基础课程,其难点在于将抽象偏微分方程与物理背景、定解条件有机统一。其中,分离变量法作为贯穿热方程、波动方程与 Laplace 方程的核心方法,学生普遍表现为“会套步骤、不解逻辑”,尤其在边界条件作用、本征值问题形成及跨方程迁移方面存在明显认知障碍。

现有研究为教学改进提供了多元视角:部分学者从课程整体改革入手,倡导“以学生为中心”^[1]、BOPPPS 教学模式^[2]、课程思政融合^[3]、课程建设与教学改革^[4]与教学模式创新^[5]等;另一些聚焦技术赋能,强调 Matlab/Python 可视化辅助教学的价值^[6-8];还有研究专门针对分离变量法,指出其教学需强化方法本质与结构化流程^[9-12]。然而,上述成果多侧重宏观改革或单点策略,对学生在分离变量法学习中的具体认知断点(如“边界条件如何导出本征值问题”“为何初始条件仅用于定系数”)缺乏针对性剖析。

本文基于两轮教学实践,聚焦学生在分离变量法学习中的具体认知障碍,提出以定解问题结构分析为主线的教学改进路径,构建“问题分析—变量分离—本征求解—系数确定”的四阶教学框架,旨在帮助学生从机械模仿转向逻辑理解与迁移应用。

基金项目: 2025 安徽省省级质量工程信息与计算科学专业质量提升与改造项目(2025zytsct024)。

一、分离变量法教学中的主要难点

（一）对方法来源理解不足，容易将其视为形式化技巧

在传统教学中，教师往往直接从设定乘积型解开始推导。例如，对于含有空间变量和时间变量的函数，通常设：

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

然后将其代入原方程，通过分离变量得到两个常微分方程。

虽然这种处理方式简洁高效，但如果缺少物理背景和定解问题结构分析，学生容易把分离变量法理解为一种“人为设定”的代数技巧，而不能理解其产生的合理性和适用范围。例如，在讲授一维热传导方程时，部分学生能够记住将温度函数分解为空间函数与时间函数乘积的形式，却不能说明温度分布为什么既与空间位置有关，又随时间变化。在讲授弦振动方程时，部分学生只关注最终的正弦级数解，却不能结合两端固定条件理解边界条件的物理意义。这种学习状态导致学生对方法的认知停留在表层，一旦问题形式稍有变化，就难以独立判断是否适合使用分离变量法。

（二）重视计算步骤，忽视求解逻辑

分离变量法的求解过程包括设乘积型解、代入方程、引入分离常数、建立本征值问题、求本征函数、利用初始条件确定系数等多个环节。由于步骤较多，学生在学习时往往倾向于机械记忆解题模板。例如，对于齐次边界条件下的一维热方程，学生可能记住解具有如下形式：

$$u(x, t) = \sum b_n \exp(-\lambda_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

但对于其中的指数衰减因子、本征函数和展开系数分别来自何处，缺乏清晰认识。这种“会套步骤但不理解逻辑”的问题，在变式题中表现尤为明显。当边界条件由第一类变为第二类，或者方程类型、区域形状发生变化时，学生常常无法独立调整求解过程，说明其尚未真正形成结构化的方法认知。

（三）对边界条件与本征值问题关系认识不足

分离变量法教学中的关键环节之一，是由边界条件导出空间部分的本征值问题。然而，学生往往对这一机制理解不足，主要表现为：不能说明为什么边界条件主要作用于空间函数；不能根据不同边界条件正确判断本征值和本征函数形式；在分离常数取值讨论中缺乏严谨性。

例如，对于两端固定的弦振动问题，边界条件为：

$$X(0) = X(l) = 0,$$

由此可得到相应的空间本征函数：

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), n = 1, 2, 3, \dots,$$

部分学生虽然知道最终会出现正弦函数，却不清楚这是由空间方程与边界条件共同决定的结果。还有学生误以为所有分离变量法问题都会得到正弦函数，而忽略了余弦函数、双曲函数或其他形式本征函数出现的条件。这说明学生没有真正理解“边界条件决定本征值问题，本征值问题决定本征函数系”的核心逻辑。

（四）混淆初始条件与边界条件的作用

在定解问题中，边界条件和初始条件具有不同作用。边界条件通常用于确定空间部分的本征值问题，而初始条件主要用于确

定级数展开系数。但在实际学习中，学生常常将二者混淆。例如，有的学生在未利用边界条件建立本征函数系之前，就试图直接代入初始条件求系数；也有学生在确定展开系数时忽视正交性，只是形式化地将初始函数与解表达式对应。这种问题反映出学生对定解问题整体结构认识不足，没有建立“方程—边界条件—初始条件”之间的层次关系。

二、分离变量法教学改进的设计与实施

（一）从物理背景和定解问题出发，揭示方法来源

针对学生对方法来源认识不足的问题，教学中不宜一开始就直接进入公式推导，而应从典型物理模型出发，引导学生理解方程与条件的实际含义。例如，在讲授一维波动方程时，可先从弦振动模型出发，说明弦上任一点的位移既依赖空间位置，也随时间变化；两端固定意味着位移函数在端点处恒为零，从而自然形成边界条件。

通过这种教学安排，学生能够认识到分离变量法并非脱离实际问题的人为技巧，而是为解决具有特定方程、边界条件和初始条件的定解问题而形成的一种经典方法。教师在教学中应引导学生先回答三个问题：研究对象是什么？未知函数依赖哪些变量？方程和条件分别描述什么物理含义？只有先完成这些分析，变量分离才具有明确的问题背景。

（二）显化求解流程，构建结构化方法框架

针对学生重记忆、轻逻辑的问题，教学中应将分离变量法求解过程加以结构化和流程化。本文将分离变量法概括为以下五个基本步骤。

第一，分析定解问题结构，明确方程类型、区域范围、边界条件和初始条件。

第二，设乘积型特解。例如： $u(x, t) = X(x)T(t)$ 或 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ 。

第三，代入原方程，分离变量并引入分离常数。

第四，结合边界条件建立空间部分的本征值问题，求出本征值和本征函数。

第五，利用初始条件和正交展开确定系数，构造级数形式的解。

可将上述过程概括为：定解问题分析 → 变量分离 → 分离常数讨论 → 本征值问题 → 本征函数展开 → 确定系数。

这一流程有助于学生从整体上把握分离变量法的求解链条，而不是将其视为若干孤立公式的组合。在课堂教学中，可以要求学生每完成一道题，都用一两句话说明“这一步在解决什么问题”，从而促进其从机械运算转向逻辑表达。

（三）强化边界条件分析，突出本征值问题形成机制

边界条件是分离变量法教学中的核心内容。教学中应将边界条件分析从一般步骤中凸显出来，作为理解本征值问题形成机制的关键环节。例如，对于一维齐次边界条件问题，可引导学生比较以下几种情形：

第一类边界条件： $X(0)=0, X(l)=0$;
第二类边界条件： $X'(0)=0, X'(l)=0$;
混合边界条件： $X(0)=0, X'(l)=0$ 。

通过比较不同边界条件下本征函数形式的变化，学生可以认识到，本征函数并非固定为正弦函数，而是由空间方程与边界条件共同决定。对于第一类边界条件，常出现正弦函数系；对于第二类边界条件，常出现余弦函数系；对于混合边界条件，则可能出现半整数形式的本征值。教学中可进一步引导学生总结如下逻辑链条：边界条件 $\rightarrow$ 空间边值问题 $\rightarrow$ 本征值 $\rightarrow$ 本征函数系 $\rightarrow$ 级数展开。这一逻辑链条是理解分离变量法的关键。通过反复强调该机制，学生能够逐渐摆脱“公式套用式”学习，转向对方法结构的理解。

（四）区分边界条件与初始条件，强化定解问题整体意识

针对学生混淆边界条件与初始条件的问题，教学中应明确二者在求解过程中的不同作用。

可采用如下方式说明：

第一，方程本身描述变量之间的演化规律，决定分离后各部分方程的基本形式。

第二，边界条件描述区域边界上的约束，主要用于建立本征值问题，并确定本征函数。

第三，初始条件描述初始时刻系统状态，主要用于利用正交性确定展开系数。

例如，在齐次边界条件下的一维热传导问题中，边界条件先用于确定空间本征函数 $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ ，初始条件则用于将初始温度分布 $f(x)$ 展开为相应的 Fourier 正弦级数，从而确定系数 b_n 。

通过这种比较，学生能够更清楚地理解定解问题的整体结构。教学中还可以要求学生在每次解题前先完成“条件功能判

断”，即说明每一个条件将在求解过程中的哪一步被使用。这样既能帮助学生避免条件误用，也能提高其解题表达的规范性。

（五）结合图像演示与数学软件，增强直观理解

《数学物理方程》内容抽象，若仅依靠符号推导，学生往往难以形成直观认识。Matlab、Python 等数学软件能够通过图像演示和数值模拟帮助学生理解抽象的数学结果。

例如，在讲授热方程时，可展示不同初始温度分布下温度函数随时间逐渐趋于平衡的过程，使学生直观理解指数衰减因子的作用。在讲授波动方程时，可展示弦振动中不同模态叠加后的运动图像，使学生理解本征函数叠加与实际振动形态之间的关系。在讲授 Laplace 方程时，可通过等势线或三维曲面展示稳态场分布。

需要注意的是，可视化教学应服务于理论理解，而不能替代理论推导。因此，在使用软件演示时，教师应引导学生将图像变化与解析表达式中的本征值、本征函数和展开系数联系起来，避免学生只关注图形效果而忽视数学本质。

三、结语

分离变量法是《数学物理方程》课程中的核心方法，其教学关键不在于单纯训练求解步骤，而在于帮助学生理解定解问题、边界条件、本征值问题与正交展开之间的内在联系。本文围绕学生学习中的主要困难，提出以定解问题结构分析为主线的教学改进思路，并通过流程显化、条件辨析、方程比较和分层练习等方式，引导学生从机械模仿转向逻辑理解。教学实践表明，该思路有助于提升学生对分离变量法的整体认识和迁移应用能力。后续教学中仍需进一步加强复杂问题案例设计和过程性评价，以持续提高课程教学效果。

参考文献

- [1] 胡赵胜, 林珍华, 常晶晶. "以学生为中心"的数学物理方程课程教学方法探索 [J]. 物理通报, 2024 (04): 13-16.
- [2] 鲍文锦, 郭会, 乔田田. 基于 BOPPPS 教学方法的 "数学物理方程" 课程建设与实践 [J]. 科教导刊, 2024 (17): 90-92.
- [3] 陈小刚, 崔继峰. "数学物理方程" 课程建设与思政教育融合的设想和实践 [J]. 科教文汇, 2024 (10): 57-60.
- [4] 王春朋. 数学物理方程课程建设与教学改革研究 [J]. 吉林省教育学院学报, 2025 41(06): 102-107.
- [5] 李勇霖, 蔡幸福, 霍勇刚, 曹晓岩. 新时代数学物理方程教学模式创新与实践探索 [J]. 大学, 2025 (11): 97-100.
- [6] 刘彪, 刘庆源, 刘华勇. Matlab 在数学物理方程可视化教学中的探析 [J]. 科技视界, 2022 (25): 138-140.
- [7] 热合买提江·依明. Python 在《数学物理方程》教学中的应用研究 [J]. 高等数学研究, 2022 25 (03): 86-89.
- [8] 谭佳, 赵润, 苏明明. 数学软件在数学物理方法课程教学中的应用 [J]. 科教文汇, 2023 (14): 74-77.
- [9] 吴江. 论《数学物理方程》中的分离变量法教学 [J]. 重庆教育学院学报, 2003 (03): 8-9.
- [10] 李时敏. 数学物理方程中分离变量法教学初探 [J]. 高教学刊, 2015 (13): 38+40.
- [11] 王晶. 数学物理方程中的分离变量法 [J]. 中国校外教育, 2014 (12): 102.
- [12] 智丽丽. 分离变量法在数学物理方程中的应用 [J]. 昌吉学院学报, 2013 (01): 68-72.