

时间序列分析教学中 Wold 分解定理与 Cramér 分解定理的比较研究——从结构、论证与应用视角

张新宇, 吴国栋, 霍冉, 冯瑞琴, 张军^{*}
内蒙古农业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010018
DOI:10.61369/ETI.2026050033

摘 要 : 本文从时间序列分析教学需求出发, 以理论发展历史为线索, 比较了 Wold 分解定理与 Cramér 分解定理的思想渊源、理论结构与教学方法。作为瑞典统计学派师生代表, Wold (1938) 建立平稳序列正交分解框架, Cramér (1961) 将其拓展至非平稳序列, 形成从平稳到非平稳的完整分解逻辑。本文系统分析两定理在结构形式、论证思路、适用条件与教学难点等方面的异同, 强调教学中应突出其思想传承与范式拓展的双重意义, 帮助学生构建统一深刻的时间序列分解观。

关 键 词 : 时间序列分解; Wold 分解定理; Cramér 分解定理; 平稳过程; 非平稳序列

A Comparative Study of the Wold Decomposition Theorem and the Cramér Decomposition Theorem in Time Series Analysis Pedagogy — From the Perspectives of Structure, Argumentation, and Application

Zhang Xinyu, Wu Guodong, Huo Ran, Feng Ruiqin, Zhang Jun^{*}
College of Science, Inner Mongolia Agricultural University, Hohhot, Inner Mongolia 010018

Abstract : Based on the practical needs of teaching time series analysis and tracing the historical development of theory, this paper compares the intellectual origins, theoretical structures, and pedagogical approaches of the Wold decomposition theorem and the Cramér decomposition theorem. As representative contributions from a mentor and his student in the Swedish school of statistics, Wold (1938) established an orthogonal decomposition framework for stationary processes, while Cramér (1961) extended it to non-stationary processes, forming a complete decomposition logic from stationary to non-stationary. This paper systematically analyzes the similarities and differences between the two theorems in structural forms, argumentation, applicability, and teaching difficulties. It emphasizes that pedagogy should highlight the dual significance of their intellectual legacy and paradigmatic extension, helping students construct a unified and profound perspective on time series decomposition.

Keywords : time series decomposition; Wold decomposition theorem; Cramér decomposition theorem; stationary process; non-stationary series

时间序列分解思想源于早期经济序列趋势、季节与随机成分的分离研究, 伴随随机过程理论发展, 逐步上升为严谨数学理论。瑞典统计学派代表人物 Herman Wold 与 Harald Cramér 提出的两大分解定理, 构成该领域理论发展的重要篇章。作为师生, Wold (1938) 率先提出平稳序列 Wold 分解定理^[1], 奠定平稳分析基础; Cramér (1961) 将其推广至非平稳序列^[2], 形成“学生先行、导师拓展”的学术轨迹。两定理是教学核心内容, 但学生易混淆其适用条件与内在逻辑。本文从结构形式、证明方法、适用范围、教学难点四个维度系统比较两定理, 结合教学实践提出课程设计建议, 帮助学习者建立清晰的时间序列分解理论框架。

基金项目:

内蒙古农业大学校级教改项目“农业院校统计专业《时间序列分析》课程融入思政元素混合式教学模式的研究与实践”(2024214082, 作者为项目负责人);

内蒙古农业大学校级一流课程建设项目“时间序列分析线上线下混合式课程建设”(内农大教字[2023]13号, 作者为项目负责人);

内蒙古农业大学校级基础基金项目“基于 Markov-Model 对荒漠草原植物群落时空格局演变的研究”(JC2021003, 作者为项目负责人)。

作者简介:

张新宇 (1991.01-), 女, 汉族, 内蒙古乌兰察布市人, 内蒙古农业大学理学院, 讲师, 硕士研究生, 统计预测与决策;

吴国栋 (1981.07-), 男, 汉族, 内蒙古呼和浩特人, 内蒙古农业大学理学院, 副教授, 博士研究生, 大数据与智能信息处理;

霍冉 (1981.01-), 男, 汉族, 内蒙古呼和浩特市人, 内蒙古农业大学理学院, 副教授, 博士研究生, 应用数学;

冯瑞琴 (1990.02-), 女, 汉族, 内蒙古乌兰察布市人, 内蒙古农业大学理学院, 讲师, 硕士研究生, 统计预测与决策方向;

通讯作者: 张军 (1980.12-), 男, 汉族, 山西省怀仁市人, 内蒙古农业大学理学院, 副教授, 博士研究生, 统计预测与决策方向。

一、两个分解定理的阐述

Wold为离散平稳时间序列建立了精巧分解框架，首次将序列结构剖解为两个正交成分：完全由历史信息决定的确定性分量与纯粹随机创新。对零均值宽平稳序列 x_t ，Wold 分解存在唯一表示^[3]：

$$x_t = V_t + \zeta_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \zeta_t \quad (1)$$

其中 $\hat{a}_t$ 是白噪声序列，满足 $E(\varepsilon_t) = 0$ ， $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ ，且 $\hat{a}_t$ 与所有过去值 $\hat{a}_{t-1}, \hat{a}_{t-2}$ 不相关；系数序列 ψ_j 满足 $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ ，这保证了移动平均部分的收敛性；而 V_t 是一个确定性过程，它完全由历史的无限信息所决定，在 Hilbert 空间的意义上与随机部分正交。

证明基于泛函分析：将序列线性组合构成的集合视为 Hilbert 空间 H ，内积定义为协方差 $\langle Y, Z \rangle = E(YZ)$ 。定义信息集 $H_t = \overline{\text{span}}\{X_s : s \leq t\}$ ，考察子空间交 $D = \bigcap_{t=-\infty}^{\infty} H_t$ 。通过几何论证，任何平稳序列可唯一分解为投影到 $H_{-\infty}$ 的部分（确定性）与投影到其正交补空间的部分（移动平均）。确定性过程被刻画为历史信息集的极限交集，纯非确定性过程则相反。教学中理解该定理的关键在于把握 Hilbert 空间投影的几何意义及平稳性对子空间结构稳定性的保证。

Cramér 将分解思想推广至非平稳序列。若序列 y_t 的 d 阶差分 $\nabla^d y_t$ 是平稳过程， y_t 可以表示为^[4]：

$$y_t = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k t^k + S_t + X_t \quad (2)$$

其中第一项是一个 $d-1$ 次多项式（确定性趋势）；第二项为周期成分（满足周期 s ），而 X_t 是一个零均值的平稳过程，可以进一步应用 Wold 分解。

证明从差分算子 $\nabla = 1 - B$ （ B 为后移算子）出发。分析特征多项式 $(1-z)^d$ 和季节算子 $1 - B^s$ 。单位根 $z=1$ 的重数 d 决定趋势多项式次数；单位圆上的根 $e^{2\pi i k/s}$ 对应周期频率。只要序列差分平稳，原序列即可表示为这些特征根对应的确定性函数与平稳过程之和。

二、两定理的比较分析

Wold 分解的结构体现了一种极简之美^[5]：

$$x_t = V_t(\text{确定性部分}) + \zeta_t(\text{移动平均}) \quad (3)$$

二分法在平稳世界中自足完备，确定性成分由历史信息极限交集精确定义，移动平均部分反映随机冲击的衰减影响。

Cramér 分解的结构则更加丰富和分层^[6]：

$$y_t = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k t^k (\text{多项式趋势}) + S_t (\text{周期成分}) + X_t (\text{平稳残差}) \quad (4)$$

三分法反映非平稳序列的复杂现实：趋势、周期、平稳残差。后者可进一步 Wold 分解，体现嵌套关系。哲学上，Wold 分解关注信息时间展开（认识论），Cramér 分解关注波动时间尺

度（现象学），两者互补。

Wold 证明是泛函分析与概率论的结合：构造 Hilbert 空间，利用投影几何论证，优雅且揭示深层对称性。Cramér 证明更像工程解法：从差分算子出发，分析特征根识别趋势与周期，代数方法可操作性强，提供明确算法（差分、检验平稳性、识别周期、估计参数）。教学可通过模拟案例对比：含趋势、正弦周期、白噪声的序列，先用 Cramér 分解（差分消除趋势，分离周期），再对残差用 Wold 分解（计算自相关，识别 AR 结构）。Cramér 分解为 Wold 分解“准备舞台”^[7-8]。

Wold 分解是平稳序列的“宪法”。金融领域资产收益率常假定平稳，Wold 分解分离可预测成分与噪声^[9]。Cramér 分解是非平稳序列的“工具箱”，处理趋势和周期。例如中国 GDP 含长期增长、朱格拉周期、库兹涅茨周期等，需综合运用 Cramér 分解（HP 滤波分离趋势周期，谱分析识别频率）和 Wold 分解（对残差建模）。教学案例：美国月度失业率（1948-2023）——直接 Wold 分解自相关衰减慢（非平稳）；改用 Cramér 分解：单位根检验需一阶差分，差分后显示 12 个月周期，剔除季节因素后平稳，再 Wold 分解得 AR(2) 过程。两定理协同：Cramér 负责预处理，Wold 负责精细建模^[10]。

教学难点包括：（1）Wold 中“确定性”的技术含义（历史信息空间交集非空）与日常语言混淆。通过极端例子解决：正弦波 $\sin(\theta t)$ 是确定性过程，白噪声是纯非确定性过程，ARMA 介于之间。（2）误以为 Cramér 分解仅是 Wold 的简单扩展。实际上 Wold 基于平稳性和 Hilbert 空间几何（描述性），Cramér 基于差分算子和特征根理论（操作性），出发点不同。（3）证明抽象性。Wold 证明对无泛函分析背景的学生困难。教学策略：先讲有限维投影（三维空间向量分解），再类比无穷维。Cramér 分解可通过差分方程解结构建立直观：一阶差分方程解为线性函数加平稳部分，二阶为二次函数加平稳部分，以此类推。（4）两定理应用选择。学生常问：给定序列用哪个？答：先检验平稳性。平稳则用 Wold 分解 ARMA；非平稳但差分后平稳，先用 Cramér 分解识别趋势和周期，再对残差用 Wold 分解。Cramér 是预处理，Wold 是核心建模。通过大量实际数据练习培养分层思维^[11]。

三、结语

本文系统比较了 Wold 分解定理与 Cramér 分解定理。Wold 分解是平稳序列的“结构宪法”，从 Hilbert 空间几何视角将序列分解为确定性与纯随机部分，奠定线性预测理论基石。Cramér 分解是非平稳序列的“操作工具箱”，通过差分算子与特征根分析，将含趋势和周期的序列分解为确定性成分与平稳残差，打通从非平稳到平稳的建模路径。两定理一脉相承，体现从特殊到一般、从理论到应用的认识规律。

它们共同构筑了时间序列分析的理论基石与方法框架，不仅是一套数学工具，更是一种将复杂动态数据分解为不同时间尺度、不同可预测性成分的思维方式。这种分解观贯穿从 Box-Jenkins 方法论到状态空间模型、从频域分析到小波变换的发

展史。

在数据科学教育中，时间序列分析教学面临理论深度与实用广度的平衡难题。通过对两定理的深入比较与融合讲解，可帮助学生建立统一而开放的分解观：统一于“分解”核心思想，开放于从平稳到非平稳、从线性到非线性、从时域到频域的多场景分析。这既是对统计先贤思想的继承，也是应对未来复杂序列分析挑战的准备。

参考文献

[1]Wold H. A study in the analysis of stationary time series[M]. Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1938.

[2]Yule G U. Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series-a study in sampling and the nature of time-series[J].Journal of the Royal Statistical,1926,89(1):1-63.

[3] 易丹辉,王燕.应用时间序列分析 [M].5版.中国人民大学出版社,2019:36-47.

[4]Tsay, R. S.金融时间序列分析 [M].3版.王远林,王辉,潘家柱,译.北京:人民邮电出版社,2012:21-32.

[5] 聂淑媛.沃尔德与离散平稳时间序列 [J].咸阳师范学院学报,2012,27(2):72-75.

[6] 乔舰,范淑芬.时间序列分析中几个概念的解析 [J].高等数学研究,2023,26(1):57-61.

[7] 郭丽敏,李成,冯艳青.基于互联网+人工智能的“应用时间序列分析”课程教学改革 [J].常州工学院学报,2025,38(2):100-104.

[8] 陈惠达,杜进林.基于“SARIMA-BP/SVM/RF”联合模型及R语言实现的《时间序列分析》课程教学改革探索 [J].中国卫生统计,2025,42(4):632-636.

[9] 邓新,葛梅梅,丁洋.基于OBE理念的应用型本科院校时间序列分析课程教学改革探究 [J].中国管理信息化,2024,27(20):225-228.

[10] Zheng Y. Research on Teaching Reform and Innovation in a Time Series Analysis Course Based on Artificial Intelligence[J].International Education Forum,2025,3(9):112-128.

[11] 李文,于文军,杜守国.大数据时代下的“时间序列分析”课程教学改革探索 [J].对外经贸,2024(5):109-111,115.