

轮换对称性在解题中的应用研究

石尚雨

陕西理工大学培源书院, 陕西 汉中 723003

DOI:10.61369/ETI.2026050036

摘 要 : 本文简述轮换对称的定义与基本性质, 结合高等数学微积分计算中的实际应用, 利用轮换对称性可以化繁为简、减少运算量、规避重复计算, 有效提升解题效率, 同时有助于构建整体化、结构化的数学思维, 具备良好的解题实用价值与学习指导意义。

关 键 词 : 轮换对称性; 积分; 高等数学

Research on the Application of Rotational Symmetry in Problem Solving

Shi Shangyu

Peiyuan Academy, Shaanxi University of Technology, Hanzhong, Shaanxi 723003

Abstract : This article briefly describes the definition and basic properties of permutation symmetry, and combines its practical applications in advanced mathematics calculus calculations. By utilizing permutation symmetry, complex problems can be simplified, the amount of calculation can be reduced, and repetitive calculations can be avoided, effectively improving the problem-solving efficiency. At the same time, it helps to build an integrated and structured mathematical thinking, possessing good practical value and learning guidance significance for problem-solving.

Keywords : rotational symmetry; integration; advanced mathematics

引言

轮换对称性是微积分的核心性质与重要分析思想, 贯穿多元函数、重积分、曲线积分与曲面积分等核心知识模块。轮换对称性是求解多元微积分问题的特殊且高效的分析方法。灵活运用轮换对称性, 可深度挖掘积分区域、被积函数以及多元函数的隐含对称性质, 简化积分运算、优化极值推导过程, 实现复杂微积分问题的简约求解。因此, 系统梳理轮换对称性在微积分中的适用场景与使用准则, 对简化多元微积分运算、夯实微积分解题思维、提升高等数学分析能力具有重要的理论与实践意义^[1]。

一、轮换对称性的概念

定义1 积分区域的轮换对称性

设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 为欧式空间, 点 $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的区域。

若 $\forall P_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n \Rightarrow P_2(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n \dots \Rightarrow$

$P_n(x_n, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ 成立, 即对坐标做依次循环移位: 第 k 个坐标替换为原第 $k+1$ 个坐标, 最后一个坐标替换为原第一个坐标。则称区域 Ω 关于变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 具有轮换对称性。即区域在坐标循环轮换变换下保持不变。

例如: 圆域 $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1$, 当 $P_1(x, y) \in \Omega \Rightarrow y^2 + x^2 \leq 1$, 即 $P_2(y, x) \in \Omega$, Ω 关于 x, y 具有轮换对称性。

定义2 函数的轮换对称性

设 函 数 $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \equiv f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) \equiv \dots \equiv f(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$, 则称函数

$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ 关于变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 具有轮换对称性。

二、在多元函数微分中的应用

(一) 求偏导数或者高阶偏导数

基本思想: 由一个变量的偏导结果, 直接轮换得到其余变量的偏导, 不用重复求导。

[例1] 已知 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 证明: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 。

证明 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}$$

由于在函数 u 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3y^2 - r^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^5} (3x^2 - r^2 + 3y^2 - r^2 + 3z^2 - r^2) = 0。$$

(二) 无条件极值

基本思想: 若函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ 关于变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 具有

轮换对称性。则一阶偏导方程组 $\begin{cases} f_{x_1} = 0 \\ f_{x_2} = 0 \\ \dots \\ f_{x_n} = 0 \end{cases}$ 仍是轮换对称方程组, 常规多项式函数的驻点必满足 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ 。

解题过程中, 不用联立复杂方程组, 直接令所有变量相等, 代入一阶偏导为零的条件求驻点, 再用二阶偏导判别法判断极值。

[例2] 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ 的极值。

解 由于函数 u 关于 x, y, z 具有轮换对称性,

$u_x = 2x + y + z = 0$, 取 $x = y = z$ 带入 $u_x = 0$ 得唯一驻点 $(0, 0, 0)$

$A = u_{xx} = 2 > 0, B = u_{xy} = 1, C = u_{yy} = 2$

因为 $AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$

所以 $(0, 0, 0)$ 为极小值点, 且极小值为 $u(0, 0, 0) = 0$ 。

(三) 条件极值

基本思想: 目标函数和约束条件均轮换对称, 则拉格朗日函数仍为轮换对称函数, 其偏导方程组必推出 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ 。

[例3] 求函数 $u(x, y, z) = xyz$ 条件

$x + y + z = a (x > 0, y > 0, z > 0)$ 下的最大值。

解 目标函数 $u(x, y, z)$ 和约束条件均关于 x, y, z 轮换对称。

构造拉格朗日函数 $L(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$

$$\text{求偏导方程组} \begin{cases} L_x = yz + \lambda = 0 \\ L_y = xz + \lambda = 0 \\ L_z = xy + \lambda = 0 \end{cases}$$

由轮换对称性: $yz = zx = xy$, 结合 $x > 0, y > 0, z > 0$, 得 $x = y = z$

$$\text{代入约束 } x = y = z = \frac{a}{3}$$

$$\text{求最大值 } u_{\max} = \frac{a^3}{27}。$$

三、在重积分中的应用

(一) 二重积分中的应用

定义3 设积分区域 D 关于 $y = x$ 对称, 若对于任意 $(x, y) \in D$, 总有 $f(x, y) = f(y, x)$

(或 $f(x, y) = -f(y, x)$), 则称 $f(x, y)$ 关于变量轮换对称 (或反对称)。

结论1 设积分区域 D 关于 x, y 具有轮换对称性, 则有:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy;$$

$$\text{常见结论有 } \iint_D x dx dy = \iint_D y dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x + y) dx dy;$$

$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy。$$

结论2 设积分区域 D 关于 x, y 具有轮换对称性, D_1 表示 D 在直线 $y = x$ 的上方 (或下方) 的部分,

$$\text{则 } \iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$$

$$\text{或 } \iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy;$$

结论3 设积分区域 D 关于 x, y 具有轮换对称性, 若 $f(x, y)$ 关于变量反对称, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ 。

[例4] 计算 $I = \iint_D \sin x^2 \cos y^2 dx dy$, 其中 D 是圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 。

解 因为积分区域 D 关于 x, y 轮换对称, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sin x^2 \cos y^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [\sin x^2 \cos y^2 + \sin y^2 \cos x^2] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \sin r^2 dr = \frac{\pi}{2} (1 - \cos 1)。 \end{aligned}$$

[例5] 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 求 $\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) d\sigma$ 。

解 因为积分区域 D 关于 x, y 轮换对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_D y^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned}$$

$$\text{从而有 } I = \frac{1}{a^2} \frac{\pi}{4} R^4 + \frac{1}{b^2} \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} R^4 (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})。$$

(二) 三重积分中的应用

定义4 设空间有界闭区域 Ω , 若任意 $(x, y, z) \in \Omega$, 都有 $(y, z, x) \in \Omega$ 、 $(z, x, y) \in \Omega$, 则称区域 Ω 关于变量 x, y, z 轮换对称。

结论4 设积分区域 Ω 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 则有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv &= \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dv = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dv \\ &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} [f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)] dv。 \end{aligned}$$

常见结论有

$$\iiint_{\Omega} x dv = \iiint_{\Omega} y dv = \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$$

$$\iiint_{\Omega} x^2 dv = \iiint_{\Omega} y^2 dv = \iiint_{\Omega} z^2 dv = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

[例6] 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) dv$, 其中 Ω : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 。

解 因为 Ω 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 所以

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) dv = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2) dv$$

$$= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

$$= \frac{8\pi}{15}.$$

(三) 线积分中的应用

结论5 若平面曲线 L 关于 x, y 具有轮换对称性, 则有

$$(1) \int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds = \frac{1}{2} \int_L [f(x, y) + f(y, x)] ds$$

(2) 当 L 关于 $y = x$ 对称, L 在 $y = x$ 的上半部分为 L_1 , 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{L_1} f(x, y) ds & f(x, y) = f(y, x) \\ 0 & f(x, y) = -f(y, x) \end{cases}$$

【注】对于空间曲线也有类似结论。

常见结论有 $\int_L x ds = \int_L y ds = \frac{1}{2} \int_L (x + y) ds$;

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \frac{1}{2} \int_L (x^2 + y^2) ds.$$

[例7] 计算 $I = \oint_{\Gamma} [(x+2)^2 + (y-3)^2] ds$, 其中 Γ 为空间曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} (a > 0).$$

解 被积函数展开得

$$I = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13) ds = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds + \oint_{\Gamma} (4x - 6y) ds + \oint_{\Gamma} 13 ds.$$

曲线 Γ 为空间的大圆, 半径为 a , 故周长为 $2\pi a$, 由轮换对称

性, 有 $\oint_{\Gamma} x^2 ds = \oint_{\Gamma} y^2 ds = \oint_{\Gamma} z^2 ds$, 则 $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds = \frac{2}{3} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3} a^2 \cdot 2\pi a = \frac{4}{3} \pi a^3$

同理, 由轮换对称性得 $\oint_{\Gamma} x ds = \oint_{\Gamma} y ds = \oint_{\Gamma} z ds$, 则

$$\oint_{\Gamma} x ds = \oint_{\Gamma} y ds = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} (x + y + z) ds = 0.$$

$$\oint_{\Gamma} 13 ds = 13 \oint_{\Gamma} ds = 13 \cdot 2\pi a = 26\pi a$$

故 $I = \frac{4}{3} \pi a^3 + 0 + 26\pi a$.

(四) 面积分中的应用

结论6 设积分曲面 Σ 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(y, z, x) dS = \iint_{\Sigma} f(z, x, y) dS$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)] dS$$

常见结论有 $\iint_{\Sigma} x dS = \iint_{\Sigma} y dS = \iint_{\Sigma} z dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

[例8] 计算 $\iint_{\Sigma} (x^4 + 2y^2 z^2) dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

解 因为 Σ 具有轮换对称性, 所以有

$$\iint_{\Sigma} (x^4 + 2y^2 z^2) dS = \iint_{\Sigma} (y^4 + 2z^2 x^2) dS = \iint_{\Sigma} (z^4 + 2y^2 x^2) dS$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^4 + y^4 + z^4) dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} 2^2 dS = \frac{32\pi}{3}.$$

结论7 设积分曲面 Σ 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dydz = \iint_{\Sigma} f(y, z, x) dzdx = \iint_{\Sigma} f(z, x, y) dxdy$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) dydz + f(y, z, x) dzdx + f(z, x, y) dxdy].$$

[例9] 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 外侧。

解 因为 Σ 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 所以 $I = 3 \iint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz$

又因为 Σ 关于 xoy 面上下对称, $\Sigma_{\text{上}}$ 与 $\Sigma_{\text{下}}$ 方向相反, 且 $\frac{z}{r^3}$ 是 z 的奇函数, 则 $\iint_{\Sigma} \frac{z}{r^3} dxdy = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} \frac{z}{r^3} dxdy$;

$$I = 6 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} \frac{z}{r^3} dxdy = \frac{6}{R^3} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy$$

故

$$= \frac{6}{R^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = 4\pi$$

四、结语

轮换对称思想的核心是依托变量循环不变性与对等性, 简化多元复杂数学问题^[2]。其应用贯穿多元函数与积分运算等多个模块, 能够有效简化推理、减少运算失误。在解题过程中, 需坚持“先判定、再应用、后验证”的原则, 严守适用条件, 规避套路化误区。熟练掌握轮换对称思想, 不仅能提升解题效率与准确率, 更能培养整体、对立统一的数学思维, 为解决复杂综合性数学问题提供高效的思路与方法^[3]。

参考文献

- [1] 同济大学数学教研室. 高等数学 (七版) [M]. 北京: 高等教育出版社. 2014年7月.
- [2] 李源, 郝小枝. 多元数量值函数积分中的轮换对称性 [J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2013, 35 (S2): 433-437.
- [3] 陈云新. 轮换对称性在积分中的应用 [J]. 高等数学研究, 2001, 4 (1): 28-30.