

有空气阻力的抛体运动探析

刘愉快, 侯敏玲, 郑雯丽

肇庆学院电子与电气工程学院, 广东 肇庆 526061

DOI:10.61369/ERA.2026060028

摘 要 : 通过分析两种不同空气阻力形式下物体抛体运动, 引导学生利用微元法、配速法等求解真实物理问题, 旨在提高学生模型思维、数理结合能力。同时, 希望能够让学生建立大 - 中衔接的物理知识体系, 认识到科学是在不断修正和逼近中认识世界的过程和从“学习物理知识”向“掌握物理学思想方法”转变。

关 键 词 : 抛体运动; 空气阻力; 微元法; 配速法

Analysis of Projectile Motion with Air Resistance

Liu Yukuai, Hou Minling, Zheng Wenli

College of Electronics and Electrical Engineering, Zhaoqing University, Zhaoqing, Guangdong 526061

Abstract : Here, by analyzing projectile motion using two different forms of air resistance, it will help students use the infinitesimal method and velocity decomposition methods to solve real physical problems. This aims to enhance their modeling thinking and ability to integrate mathematics and physics. Meanwhile, it is expected that students will establish a physics knowledge system that bridges high school and university, recognizing that science is a process of constantly revising and approximating our understanding of the world, and transitioning from "learning physics knowledge" to "mastering the methods of physical thinking."

Keywords : projectile motion; air resistance; infinitesimal method; velocity decomposition methods

抛体运动作为牛顿运动定律的直接应用, 具有承上启下的作用: 既需综合运用直线运动、牛顿定律和受力分析等知识, 又为后续学习圆周运动、万有引力和电磁场中的类平抛运动奠定基础。教学实践中通常从忽略空气阻力的理想模型入手, 帮助学生聚焦于运动分解、牛顿定律和能量转化等核心规律, 从而建立基本物理观念与科学思维方法。然而在生活实践中, 如足球轨迹、滑雪跳跃、无人机投掷等, 空气阻力影响显著。为促进学生基于真实情境的知识迁移能力, 切实提升学生模型建构能力, 高中物理教学应引入有空气阻力的抛体运动问题。考虑空气阻力时, 抛体模型主要分为两类: 一是低速小物体(如雾滴、烟尘)的运动, 空气阻力与速率成正比, 即 $f = -kv$; 二是高速度或尺度较大(如跳伞、飞机飞行、汽车高速行驶、雨滴下落等)的运动, 阻力与速率的平方成正比, 即 $f = -kv^2$ 。^[1-5] 这两类模型分别对应不同的流体动力学区间, 体现了物理建模中按实际情况简化问题的重要性。

一、空气阻力 $f = -kv$ 情况下的竖直上抛问题

(一) 原题呈现

【北京2024年高考物理8题】将小球竖直向上抛出, 小球从抛出到落回原处的过程中, 若所受空气阻力大小与速度大小成正比, 则下列说法正确的是()

- A. 上升和下降两过程时间相等
- B. 上升和下降两过程损失的机械能相等
- C. 上升过程合力的冲量大于下落过程合力的冲量
- D. 上升过程的加速度始终小于下落过程的加速度

分析: 不考虑空气阻力, 小球在空中运动时间为 $t = 2v_0 / g$, 上升高度为 $h_0 = v_0^2 / 2g$ 。有空气阻力时, 上升过程空气阻力向下, 下降过程空气阻力向上; 整个运动过程, 只有阻力做功, 因而小

球落地速度 v_f 小于 v_0 , 且机械能的损失不等。为了让学生更清晰的知道空气阻力下其运动时间, 我们通过多种方法对其进行定量的求解分析。

(二) 微元法求解小球运动时间

取竖直向下为正方向, 利用微元法有

$$(mg + kv)t = m\Delta v$$

由 $\Delta h_1 = vt$ 并对整个过程进行叠加, 可得

$$mgt_1 + kh_1 = mv_1 \quad (1)$$

下降过程中, 设下降时间为 t_2 。同理, 有

$$(mg - kv)t = m\Delta v$$

基金项目: 本文系2025年肇庆市基础教育课题“大学与中学物理教育衔接及一体化知识体系构建研究”的阶段性成果。

同理可得

$$mgt_2 - kh_1 = mv_2 \quad (2)$$

(1) 和 (2) 式相加, 即

$$mgt_1 + mgt_2 = mv_1 + mv_2$$

小球在空中运动时间 $t' = t_1 + t_2 = (v_1 + v_2) / g$ 。

(三) 图像法求解小球运动时间

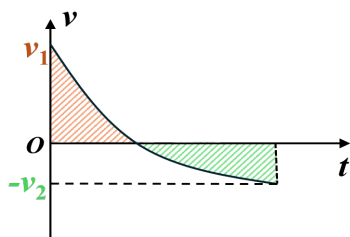


图1 例1第二问的图解法示意图

小球 $v-t$ 图如图1所示, 横坐标上下两部分面积表示其上升和下降的高度, 且它们的面积相等。由于 $f=kv$, 所以图1也是小球在整个过程的 $f-t$ 图。在 $f-t$ 图中, 显然小球在整个运动过程中空气阻力对它的总冲量为零, 也就是说小球在运动的全过程中受到的总冲量仅为重力对它的冲量。根据动量定理, 有

$$mgt = mv_2 - m(-v_1)$$

即

$$t = \frac{v_1 + v_2}{g}$$

(四) 微积分法求解小球运动时间

为了更清楚的知道 t_1 、 t_2 以及 h_1 的具体表达式, 下面将利用微积分对进行分析^[5]。

对于上升部分, 取向上为正方向, 运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

对上式分立变量, 积分得上升时间 t_1

$$t_1 = \int_{v_1}^0 \frac{dv}{-g - \frac{k}{m}v} = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{mg + kv_1}{mg} \right) \quad (3)$$

利用 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$, 运动方程可改为

$mv \frac{dv}{dy} = -mg - kv$ 对上式分离变量, 积分从初始位置 $y=0$ 到最大高度 $y=h_1$ 可得

$$h_1 = \frac{mv_1}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv_1}{mg} \right) \quad (4)$$

同理可以得到 h_1 与 v_2 的关系式

$$h_1 = -\frac{mv_2}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kv_2}{mg} \right) \quad (5)$$

下降过程取向下为正方向, 落地速度为 v_2 。运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

积分可得下降时间 t_2 为

$$t_2 = \int_0^{v_2} \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{mg}{mg - kv_2} \right) \quad (6)$$

小球在空中运动的总时间 t' :

$$t' = t_1 + t_2 = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{mg + kv_1}{mg - kv_2} \right) \quad (7)$$

联立 (4) 和 (5) 式可得:

$$(v_1 + v_2) = \frac{mg}{k} \ln \left(\frac{mg + kv_1}{mg - kv_2} \right)$$

将上式带入 (7) 式, 可得 $t' = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{mg + kv_1}{mg - kv_2} \right) = (v_1 + v_2) / g$, 此结果与利用上面里面动量定理处理结果一致。

二、空气阻力 $f=-kv$ 情况下的平抛问题

(一) 平抛例题

【例2】将一小球从距水平地面高 h 处的 A 点以速度 v_0 水平抛出, 小球运动过程中受到的空气阻力大小始终与速率成正比, 方向始终与运动方向相反, 落到水平地面上的 B 点时速度方向与水平地面的夹角为 45° , 如图2所示。已知小球从 A 点抛出时受到的空气阻力最大, 最大值恰好等于自身受到的重力, 重力加速度大小为 g 。求: 1) 小球落到 B 点时的速度大小; 2) 小球的水平射程 x ; 3) 小球从 A 点运动到 B 点的时间 t_0 。

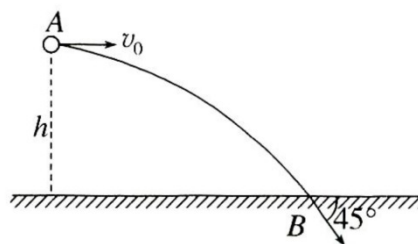


图2 例2示意图

【分析】根据题目可知小球在 A 点抛出时受到空气阻力 f 最大, 最大值恰好等于自身受到的重力, 即 $f=kv_0=mg$, 可以得到 $v_0=mg/k$ 。小球被抛出后, 其受到向下的重力和与速度方向相反的空气阻力。首先我们介绍利用微积分知识分析解决此类问题的过程与方法^[6], 以便能够理解其速度和运动的变化形式; 然后通过其速度和运动的变化规律, 巧用“配速法”求解含有与速度有关变力的平抛问题。

(二) 微积分法求解

将运动分解为水平和竖直方向, 取 y 轴向上为正, 初始条件为: $x(0)=0$ 、 $y(0)=h$ 、 $v_x(0)=v_0$ 、 $v_y(0)=0$ 。

运动方程为：

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y$$

利用分离变量的方法并结合初始条件可以求得

$$v_x(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y(t) = \frac{mg}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right)$$

设落地时刻为 t_0 ，落地时速度与水平方向成 45° ，即：

$$\tan 45^\circ = \frac{|v_y(t_0)|}{v_x(t_0)}$$

即：

$$v_0 e^{-\frac{k}{m}t_0} = -\frac{mg}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t_0} - 1 \right)$$

化简可得：

$$t_0 = \frac{v_0 \ln 2}{g}$$

将上式带入速度 $v_x(t)$ 和 $v_y(t)$ 的表达式，即可求出落地时速度分量为：

$$v_x(t_0) = \frac{v_0}{2}, v_y(t_0) = -\frac{v_0}{2}$$

速度大小为：

$$v_B = \sqrt{v_x(t_0)^2 + v_y(t_0)^2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

由 $v_x(t)$ 的表达式，可以求出其水平位移为：

$$x = \int_0^{t_0} v_x(t) dt = \frac{mv_0}{2k} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (9)$$

现在，我们分析竖直位移与初速度 v_0 的关系：

$$y(t_0) = h + \int_0^{t_0} v_y(t) dt = 0$$

对上式中的积分进行计算，可得：

$$\int_0^{t_0} v_y(t) dt = \frac{m^2 g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_0} \right) - \frac{mg}{k} t_0$$

化简可得：

$$\int_0^{t_0} v_y(t) dt = \frac{v_0^2}{2g} - v_0 t_0$$

即：

$$h = -\int_0^{t_0} v_y(t) dt = v_0 t_0 - \frac{v_0^2}{2g}$$

解得

$$t_0 = \frac{h}{v_0} + \frac{v_0}{2g}$$

(三) 配速法求解

如果以速度的方向为正方向，重力相对速度的方向就是一个“变力”。基于此，我们可以在任意时刻的速度 v 中分解一个 v_0 ，使其对应的阻力 $(-kv_0)$ 与重力平衡，这种情况下小球受到的合力 f' 就时刻与速度 v' 在同一直线上，如图3所示。这种方法称为配速法。

利用配速法后，在 A 点小球的合成初速度为 $v'_0 = \sqrt{2}v_0$ 且与竖直方向夹角为 45° ，任一时刻小球的合力 f' 与合成后的速度 v' 在一条直线上，即小球的真实运动可以看成竖直向下的匀速直线运动和斜向上的变速直线运动的叠加。到达 B 点时速度 v_B 与水平地面的夹角为 45° ，可知 v_B 与 v' 方向垂直，可知 $v_B = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0$ ， $v'_B = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0$ 。

设在 t 时刻，小球的合成后的速度 v' ，在一极短时间 Δt 内，利用微元法可知：

$$-kv'_\Delta t = m\Delta v'$$

式中 $v'_\Delta t$ 表示小球在 Δt 时间内沿着 v' 运动的距离 Δs 。从 A 点运动到 B 点的整个过程利用动量定理，即对上式进行求和：

$$-ks = m(v'_B - v'_0)$$

$$\text{即 } s = \frac{m(v'_0 - v'_B)}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{mv_0}{k}$$

s 为小球从 A 点运动到 B 点其沿着速度 v' 运动的路程，水平射程 $x = s \cdot \cos 45^\circ$ ，即

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{mv_0}{k} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

结果与 (9) 式一样。小球从 A 点运动到 B 点的时间为 t_0 ，其在 y 方向的总位移来源于两部分。第一部分为沿着竖直方向向下的匀速直线运动，第二部分为小球在斜向上 45° 方向运动产生的向上位移为 y' ，根据上述分析可知道 $y' = s \cdot \cos 45^\circ = \frac{v_0^2}{2g}$ 。即：

$$h = v_0 t_0 - y' = v_0 t_0 - \frac{v_0^2}{2g}$$

上式进行化简，即可求得 t_0

$$t_0 = \frac{h}{v_0} + \frac{v_0}{2g}$$

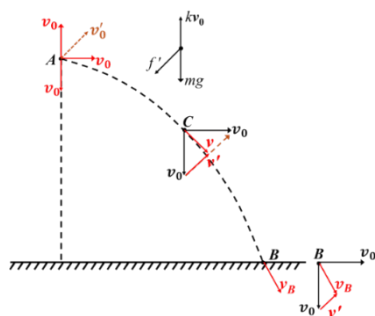


图3 例2解法二示意图

三、空气阻力 $f=-kv^2$ 情况下的平抛问题

(一) 例题再现

【例3】跳伞是一项充满挑战的户外运动。运动员在下落过程中，受到空气阻力的大小与下落速度的平方成正比，即 $f=-kv^2$ 。设运动员和伞的质量为 m ，跳伞运动员在张开降落伞的瞬间初速度 $v_0=0$ ，随着速度的增加，空气阻力不断增大，当空气阻力增大到与重力相等时，运动员达到下落的最大速度，称为终极速度 v_T 。分析跳伞运动员张开伞后，其速度随时间变化关系。

(二) 微积分法求解任一时刻

当空气阻力增大到与总重力相等的时候，跳伞运动员就达到了下落的最大速度，称为终极速度 (v_T)。根据 $kv_T^2=mg$ ，可以得到 $v_T=\sqrt{mg/k}$ 。

取竖直方向为正方向，把人伞作为一个整体，根据牛顿第二定律可知：

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

初始条件为： $t_0=0, v_0=0$ ； t 时刻，速度为 v ，对上式分离变量积分可得

$$\frac{1}{2v_T} \ln \frac{v_T + v}{v_T - v} = \frac{k}{m} t$$

化简可得

$$v = \frac{1 - e^{-\frac{2gt}{v_T}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{v_T}}} v_T \quad (10)$$

如果 t 时刻下落的高度为 h ，则下落高度 h 与速度的关系为：

$$\frac{dh}{dt} = v(t) = v_T \cdot \frac{1 - e^{-\frac{2gt}{v_T}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{v_T}}}$$

积分得：

$$h(t) = \frac{v_T^2}{g} \ln \left[\cosh \left(\frac{g}{v_T} t \right) \right] \quad (11)$$

若跳伞运动员和伞的总质量 $m=80 \text{ kg}$ ，阻力系数 $k=0.25 \text{ N}^2 \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ，重力加速度 g 取 9.8 m/s^2 ，则跳伞运动员最后的终极速度约为 56 m/s 。

四、总结

本文通过分析两种不同类型空气阻力下的抛体运动，让学生体会从“理想模型”过渡到“物理现实”和从“代数思维”跃升到“微分思维”的过程，逐步认识到理想化模型的使用条件、“模型建构”的重要性，有意识的构建中学到大学螺旋式的知识体系和深刻理解物理学提供的不是一成不变的真理而是一系列逐渐逼近真理的模型。

参考文献

- [1] 何盼盼, 胡小龙. 考虑空气阻力与速度平方成正比的小球下摆问题——缘起2022年湖北高考物理卷力学实验题 [J]. 物理教学, 2023, 45(06): 67-70.
- [2] 王永雄. 有阻力的抛体运动问题探究 [J]. 物理教学探讨, 2024, 42(06): 73-76.
- [3] 赵志栋, 陈光红. 从抛物线的几何性质看抛体运动的射程问题 [J]. 物理教师, 2016, 37(07): 56-57.
- [4] 郭雪鹏. 考虑空气阻力的斜抛运动研究 [J]. 物理教学, 2017, 39(04): 14-16.
- [5] 殷仁勇. 物理竞赛抛体问题的处理与运用 [J]. 物理教师, 2019, 40(11): 95-97.
- [6] 漆安慎, 杜婵英. 普通物理学教程·力学: 第四版 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.