

认知资源在数学问题解决理论中的效能机制研究

平宇扬, 周钰昕, 李昕

苏州工学院 数学与统计学院, 江苏 苏州 215500

DOI: 10.61369/ETR.2026180028

摘 要 : 本文我们使用了两个非常规数学问题来考察国内普通大学的三名数学师范专业学生的解题能力水平。我们发现成绩优异的学生并不能很好的解决非常规的数学问题, 这促使我们更仔细地审视他们在解决这两个问题过程中的尝试。我们发现, 如果不对特定的认知资源加以适当的控制措施, 不恰当的认知资源使用可能会妨碍问题的解决。

关 键 词 : 数学问题解决理论; 认知资源; 控制

Research on the Efficacy Mechanism of Cognitive Resources in Mathematical Problem-Solving Theory

Ping Yuyang, Zhou Yuxin, Li Xin

Suzhou University of Technology, School of Mathematics and Statistics, Suzhou, Jiangsu 215500

Abstract : In this article, we used two unconventional mathematical problems to examine the problem-solving ability level of three mathematics teacher training students in ordinary universities in China. We found that students with excellent grades are not very good at solving unconventional mathematical problems, which prompts us to examine their attempts in solving these two problems more carefully. We have found that without appropriate control measures for specific cognitive resources, inappropriate use of cognitive resources may hinder problem-solving.

Keywords : mathematical problem-solving theory; cognitive resource; control

目前已有许多学者在数学问题解决理论领域已经做了很多工作。例如, Schoenfeld (1985 年) 提出了成功解决问题的四个要素: 认知资源、启发、控制和信念系统。但这些要素之间是如何相互作用却研究不足。在本文中, 我们将重点关注在解决问题过程中特定认知资源的(过度)使用程度。

一、问题

问题 1 (“完美数”) 一个“完美数”是指可以表示为两个或多个连续正整数之和的数。试确定 50 到 70 (含 50 和 70) 之间哪些数是“完美数”。

问题 2 (公主问题) 现有九个房间排成一排, 每两个相邻房间之间有一扇门且每个房间还有一扇通往走廊的门。公主每天住在其中一个房间, 每天早上七点会搬到相邻的房间。王子想和公主交谈, 每天中午敲一扇门。如果公主在那个房间里, 她会开门, 他们就可以交谈。否则, 王子离开, 第二天中午再敲另一扇门。如果王子有 14 天时间尝试, 是否存在一种策略能保证他在这 14 天里一定能见到公主?

选择这两个非常规数学问题的原因是它们提供了不同程度的难度。这种问题广度将使我们可以更广泛地观察受试者所运用的解决问题技能。第一道“完美数”问题相对容易, 因为它的解决过程可能涉及标准公式和代数运算, 这样的解题步骤类似于国内学生更熟悉的常规数学问题。相比之下, 第二道公主问题更具挑战性, 设计本题的目的是为了测试受试者是否能够使用除尝试和

执行计划步骤之外的问题解决策略。

二、方法

我们的研究基于 Pólya (1945)^[1] 和 Schoenfeld (1985、2007)^[2,3] 的理论基础, 其特征是四个连续且首尾衔接的组成部分, 即理解问题 (UP)、制定计划 (DP)、执行计划 (CP) 和检查与反思, 以及一个由认知资源、启发、控制和信念系统组成的复杂问题解决行为分析框架。Leong 等人 (2019)^[4] 为数学问题解决的有效课堂教学提供了这些概念的实际应用, 并进一步扩大了新加坡学校数学问题解决专业的持续发展 (Leong 等人, 2021)^[5]。Toh 等人 (2011)^[6] 指出, 当教师在教授数学问题解决时, 波利亚模型或启发式教学并不是全部, 还需要关注问题解决的其他方面, 例如问题解决各部分之间的相互作用。

基于上述理论框架, 我们使用以下步骤分析了三名国内数学师范生的数学问题解决过程。这些学生是根据他们在标准测试中的数学成绩选出的, 分别来自“优秀”、“普通”和“较差”三个等级。受限于文章篇幅, 本文我们关注的是“优秀”组学生 A 的

问题解决尝试。首先，我们招募了学生 A，他在大二时通过学习“数学教育导论”课程了解了波利亚的问题解决理论。该课程使用的教材是由张奠宙等人（2023）^[7]所著，涵盖了问题解决的理论方面，但没有为学生提供使用该模型实际尝试问题的延长时间。

我们给予学生 A 30 分钟的时间来解决上述两个问题并录制了他解决问题过程的视频。解决问题时，我们要求他尽可能清晰地表达他自己的思维过程。通过反复观看记录问题解决过程的视频，我们每隔五分钟就对他采用的具体问题解决过程进行对比分析。此外，我们通过 Pólya 模型和 Schoenfeld 理论解释了他的问题解决时刻。此外我们还比较了他在两个问题上的解决过程。

三、数据

通过反复观察视频，我们记录学生 A 对于这两个问题完整的问题解决过程（如下表 1 对应第一道“完美数”问题，表 2 对应第二道“公主问题”）。受限于篇幅，下文仅展示数据呈现与分析的前十分钟。在解决“公主问题”时，学生 A 尝试了十分钟之后选择放弃。

所耗时间	具体数学步骤	问题解决时刻
0-5 分钟	3=1+2 4 5=2+3 7=3+4 奇数 偶数需要单独考虑： 6=1+2+3 8	1. 由一些小的数字开始尝试 (0' 51' ' ') 2. 注意到有些奇数是“完美数” (2' 10' ' ') 3. 猜想所有奇数都是“完美数” (4' 00' ' ') 4. 发现偶数 6=1+2+3 也是“完美数” (4' 56' ' ') 5. “我能否找到一个适用于所有偶数的通用公式” (5' 08' ' ')
6-10 分钟	在 50 ~ 70 之间的奇数和 66 是“完美数” 1+2+3+4+5+6	6. 尝试用等差数列前 n 项和的公式表达 50 到 70 之间的数字 (6' 30' ' ') 7. 发现偶数 66 是“完美数” (8' 03' ' ') 8. “该等差数列的公差只能是 1，但首项可以不同” (8' 45' ' ')

表 1 “完美数”问题的具体数学解决步骤和问题解决时刻

由表 1 可见，在解题过程中，学生 A 迅速识别出等差数列求和公式并尝试应用。从开始解题到第 24 分钟，他始终运用该公式进行求解，直至最终对限定时间内找出所有“完美数”失去信心。借助舍费尔理论框架，我们将这一过程重新解读：他调用认知资源——即熟悉的等差数列求和公式——作为寻找“完美数”的主要工具，并在解题全程坚持使用该方法。这表明他可能具有运用该公式成功解决同类问题的已有经验，因而将其视为经过验证的有效策略。

然而值得关注的是，该生对此认知资源的执着程度达到过度依赖的境地，以至于他完全忽视了从其他角度切入的可能性（例

如探索连续整数之和的不同组合形式）。准确来说，他通过等差数列求和公式确实取得了一些进展——不仅意识到连续整数求和未必从“1”开始，还尝试修正公式以适应非“1”起点的序列。但未能进一步思考 58、60、62、64 及 68 是否属于“完美数”（事实上 50 至 70 区间内仅 64 不符合条件）。因此关键在于：当公式知识耗尽时，他并未寻求替代解法——这暴露出控制维度的缺失。

表 2 总结了学生 A 在解决“公主问题”时的相关尝试。与解决第一题的过程相似，他首先试图寻找直接计算公式。然而未能发现此类公式，因此尝试未果后，他在 10 分钟左右内放弃解题。

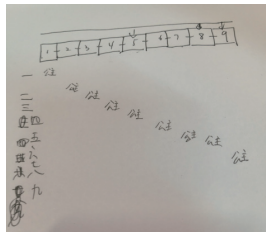
所耗时间	具体数学步骤	问题解决时刻（节选）
0-10 分钟		1. 绘制示意图辅助理解问题 (1' 26' ' ') 2. 理解问题：“在 14 天内，这是一个时间限制 (2' 30' ' ') 3. 考虑特殊情形：假设公主第一天在 1 号房内… (3' 58' ' ') … 16. 放弃：“这太抽象了，以我的智商，不能在 30 分钟内解决这个问题” (9' 30' ' ')

表 2 公主问题的具体数学步骤和问题解决时刻

四、讨论

从学生 A 的解题过程可见，在标准化数学测试中表现优异的学生未必具备高效问题解决能力。本研究观察到，过度依赖认知资源而缺乏适当控制机制可能是制约职前教师解题能力的潜在因素。这一发现为“高分低能”现象提供了合理解释：以学生 A 为例，其在“完美数”问题中凭借等差数列公式（AP 公式）这一认知资源取得良好开局——成功识别部分完美数带来的进展在心理层面强化了其对该公式的依赖，甚至发展为思维固化。当该认知资源无法推动进一步突破时，其解题信心发生断崖式下跌，迅速放弃当前问题。这种信心危机延续至后续的公主问题，最终表现为策略性撤退。

学生 A 的行为模式本质上源于双重认知失效：既困于对既往成功经验的路径依赖，又缺乏控制机制以激活替代策略。这表明，当控制机制缺位时，认知资源的过度依赖将转化为解题障碍。本研究不仅揭示了认知资源的效用边界，更引向核心问题：如何通过控制机制与认知资源的动态交互，实现特定解题情境中的策略优化。就问题解决能力培养的职前教师发展启示而言，可通过系统化训练设计使师范生亲历已有策略的效度边界，并体验控制机制是如何在策略失效时及时介入。

五、总结

本研究以 Schoenfeld 问题解决四要素与 Pólya 模型为理

论框架，选取完美数与公主问题两道非常规数学题，对一名成绩优异的数学师范专业学生展开解题过程追踪研究。研究发现，该生虽掌握扎实的数学知识与公式技能，却难以高效解决非常规问题，核心原因在于认知资源过度使用与控制机制缺失。在完美数问题中，学生过度依赖等差数列求和公式，陷入单一解题路径，忽视其他组合思路，未能完整找出目标区间内的完美数；面对难度更高的公主问题，因无法快速找到适用公式，仅尝试 10 分钟便

主动放弃。这一过程清晰呈现出，认知资源本是解题基础，但缺乏有效监控与策略调整的过度使用，会转化为解题障碍，印证了“高分低能”的认知成因。

研究表明，数学问题解决并非单纯依赖知识储备，更需要认知资源与控制机制的协同作用。未来数学教育与师范生培养中，应强化策略转换、过程监控等控制能力训练，引导学生突破路径依赖，提升应对非常规问题的实战能力，完善问题解决的综合素养。

参考文献

-
- [1] Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.
- [2] Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.
- [3] Schoenfeld, A.H. (2007). Problem solving in the United States, 1970 – 2008: Research and theory, practice and politics. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39(5 – 6), 537–551. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0038-z>
- [4] Leong, Y.H., Tay, E.G., Toh, T.L., Quek, K.S., & Yap, R.A. (2019). Concretisations: A support for teachers to carry out instructional innovations in the mathematics classroom. International Journal of Science and Mathematics Education, 17(2), 365 – 384. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9868-5>
- [5] Leong, Y.H., Toh, T.L., Tay, E.G., Quek, K.S., Toh, P.C., & Dindyal, J. (2021). Scaling up of continual professional development for mathematics problem solving in Singapore schools. Int J of Sci and Mathe Educ 19, 1291–1310. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10097-3>
- [6] Toh, T. L., Quek, K.S., Leong, Y. H., Dindyal, J., & Tay, E.G. (2011). Making mathematics practical: an approach to problem solving. World Scientific.
- [7] 张奠宙, 宋乃庆. 《数学教育导论》. 高等教育出版社 [M]. 2023.