

基于 Copula 函数的不同地区年度巨灾损失相关性分析

史千里

上海财经大学, 上海 200433

DOI: 10.61369/TACS.2026050010

摘 要 : 本研究采用 Copula 函数对中国不同地区年度巨灾损失的相关性进行定量研究。采用非参数核密度法拟合进行边缘分布, 以规避参数分布假设带来的潜在问题; 模型优选则使用两阶段极大似然法估计高斯 Copula 与 t-Copula 参数, 进而结合欧式平方距离、AIC 及 OLS 准则完成。结果表明, t-Copula 在多数区域对上表现更佳, 能够有效识别不同地区间巨灾损失的尾部相关特征。本研究成果可用于跨区巨灾风险管理、再保险定价与风险分担机制的制定。

关 键 词 : Copula 函数; 巨灾损失; 相关性分析; 核密度估计; 模型优选

Correlation Analysis of Annual Catastrophe Losses in Different Regions Based on Copula

Shi Qianli

Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433

Abstract : The study employs Copula to quantitatively investigate the correlation of annual catastrophe losses across different regions in China. The nonparametric kernel density method is used to fit the marginal distributions in order to avoid potential issues arising from parametric distribution assumptions. For model selection, a two-stage maximum likelihood estimation is applied to estimate the parameters of the Gaussian Copula and t-Copula, followed by model comparison using the Euclidean squared distance, AIC, and OLS criteria. The results show that the t-Copula performs better for most of regional pairs, effectively capturing tail dependence characteristics of catastrophe losses between different regions. The findings can be applied to cross-regional catastrophe risk management, reinsurance pricing, and the design of risk-sharing mechanisms.

Keywords : Copula; catastrophe losses; correlation analysis; kernel density estimation; model selection

引言

我国面临的地震、洪水、台风等巨灾风险在空间上存在较为显著的集聚性和联动特征, 但对于描述极端事件之间的联动关系问题, 传统 Pearson 线性相关系数方法无法对其进行准确刻画。Copula 理论依托 Sklar 定理, 将多元联合分布拆解为边缘分布与纯相关结构, 为复杂相依关系建模提供了灵活的分析框架, 在金融风险度量、资产组合配置等领域得到广泛应用。近年来, Copula 模型在金融领域的应用不断深化, 模型形式也由静态向动态 Copula、Vine Copula 拓展。闫海波^[1]、王沛瑶^[2]分别采用 Copula 模型对金融业整体风险和风险溢出效应进行了研究。王阳^[3]、Tian Jing^[4]等人的研究则将阿基米德 Copula、R-Vine Copula 引入保险经济资本测量领域。

在 Copula 模型的保险应用层面, 韩明洋^[5]、Rusyda^[6]及王淼等人^[7]分别将其应用于农业保险和森林保险的定价研究, 韩浩等人^[8]则在保险业系统性风险方向应用 Copula 模型进行了研究。但在中国学界有关巨灾损失相关性分析的研究中, Copula 模型的应用场景仍较为有限。首先从数据层面来看, 普遍存在数据约束问题, 公开渠道可获得的巨灾损失数据, 存在序列短、非正态、厚尾、平稳性差等一系列问题。数据统计口径也存在差异, 进一步导致参数估计不稳定。模型层面, 肖宇谷等^[9]的研究将 Copula 模型引入农险大灾的灾因分析, 但与其他多数研究类似, 采用单一 Copula 形式, 缺少多形式模型对比与系统性拟合优度检验, 难以证明所选形式的最优性。此外, 虽然何树红等^[10]在 Copula 应用于地质灾害研究方面做了尝试, 孟宜成^[11]也采用不同 Copula 模型进行了极端事件统计研究, 但整体而言实践层面的转化存在明显不足, 相关研究结果未能有效嵌入跨区域风险分散、再保险布局等决策和实用流程。

为弥补上述不足, 本文尝试构建一套较为完整的地区巨灾损失相关性分析框架。以2004–2022年度巨灾直接经济损失为研究对象, 设计4区域、6区域、8区域三种地区分组方案共49组区域对; 同时通过非参数核密度估计拟合边缘分布, 估计高斯 Copula 与 t-Copula 参数, 采用多准则综合优选, 计算 Kendall 秩相关、Spearman 秩相关及尾部相关系数, 展示我国巨灾损失的空间相关模式和异质性, 为后续的全统筹巨灾风险分散研究提供依据。

一、理论基础

(一) Sklar 定理

Sklar 定理是 Copula 模型的核心理论。对于 n 维联合分布函数 F ，将其分解为各变量边缘分布 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 与一个 Copula 连接函数 C ：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \quad (1)$$

当边缘分布连续时，对应的 Copula 函数唯一。联合密度函数为：

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2)$$

其中 $c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}$ ， f_n 为边缘密度。Sklar 定理实现了边缘分布与相依结构的解耦建模，为 Copula 理论的进一步应用奠定基础。

(二) 椭圆 Copula 函数族

本文基于刻画对称相依结构的能力，选用椭圆族中的高斯 Copula 与 t-Copula 进行研究，其中 t-Copula 额外具备尾部相关能力，与巨灾损失的极端联动场景适应度更高。

高斯 Copula 由多元正态分布派生而来，分布函数为：

$$C(u_1, \dots, u_n, \rho) = \Phi_\rho[\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)] \quad (3)$$

其中 ρ 为相关矩阵， Φ_ρ 表示相关系数矩阵为 ρ 的 n 元标准正态分布函数。

t-Copula 源于多元 t 分布，相比高斯 Copula 而言更善于体现变量的厚尾特征和尾部相关性，其分布函数为：

$$C(u_1, \dots, u_n, \rho, k) = t_{\rho, k}(t_k^{-1}(u_1), \dots, t_k^{-1}(u_n)) \quad (4)$$

其中 $t_{\rho, k}$ 是相关矩阵为 ρ 、自由度为 k 的 n 元 t 分布函数，自由度越小，尾部相关性越强，对金融资产收益率序列中常见的极端值联动现象的描述性也更强。

(三) 边缘分布的拟合

确定边缘分布作为构建 Copula 模型的重要步骤，一般通过参数法和非参数法确定。参数法具有较强主观性，结果可能存在较大误差。非参数法则通过引入经验分布函数和核分布，更适用于边缘分布难以确定的情况。

1. 非参数核密度估计法

考虑到巨灾损失数据的分布形式复杂、难以预先设定，采用参数法易带来模型误设风险。基于此点考虑，本文采用非参数核密度法进行估计，依托数据特征拟合边缘分布，达到提升模型稳健性的目的。

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 X 的独立同分布样本，其密度函数 $f(x)$ 的核密度估计为：

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (5)$$

其中 K 为核函数（通常取高斯核，即 $K(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$ ），窗宽 h 通过最小化积分均方误差（MISE）确定最优值。完成各区域损失增长率核密度估计后，再经概率积分变换将之转换为 $[0, 1]$ 均匀序列，以满足 Copula 建模的基本要求。

2. 基于极大似然估计的 Copula 函数参数估计

Copula 模型参数估计通常分为两个主要阶段，一是确定边缘分布的参数，二是估计 Copula 函数中的相依参数。设随机变量 X 与 Y 的联合分布函数可表示为：

$$H(x, y; \alpha) = C(F(x; \theta_1), G(y; \theta_2); \alpha) \quad (6)$$

其中， α 为 Copula 函数中的待估参数， θ_1 与 θ_2 分别为边缘分布 F 与 G 的参数。相应的联合密度函数为：

$$h(x, y; \alpha) = c(F(x; \theta_1), G(y; \theta_2); \alpha) f(x; \theta_1) g(y; \theta_2) \quad (7)$$

对于样本 $(X_i, Y_i), i=1, 2, \dots, n$ ，其似然函数可写为：

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n h(x_i, y_i; \alpha) \quad (8)$$

得到参数的极大似然估计为：

$$\hat{\alpha} = \operatorname{argmax} \ln L(\alpha) \quad (9)$$

实际应用场景中，如果边缘分布的形式难以准确设定，且对边缘分布与 Copula 函数参数进行联合估计的计算复杂度较高时，会采用两阶段估计法以简化估计过程。具体做法为先通过非参数核密度估计得到边缘分布函数估计值，再将其代入 Copula 函数似然函数，仅估计相依参数 α 。使用该方法，可以在充分利用样本信息的同时，避免边缘分布形式的误设风险，计算也更简便。

此时 Copula 参数为：

$$\hat{\alpha} = \operatorname{argmax} \ln c(F_h(x_i), G_h(y_i); \alpha) \quad (10)$$

通过上述方法，可在边缘分布未知或难以参数化情况下，实现对 Copula 函数参数的稳健估计。

(四) 参数估计与模型选优准则

以经验 Copula 为基准：

$$\hat{C}_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[F_n(x_i) \leq u]} I_{[G_n(y_i) \leq v]}, u, v \in [0, 1] \quad (11)$$

其中， I 为示性函数， $F_n(x)$ 和 $G(y)$ 分别为变量 X 和 Y 的经验分布函数，其中 $F_n(x_i) \leq u$ ， $I_{[F_n(x_i) \leq u]} = 1$ 。经验 Copula 为后续的理论 Copula 模型提供了直观的拟合基准。

1. 欧式平方距离法

欧式平方距离法通过计算理论 Copula 模型与经验 Copula 之间的欧式平方距离，评价模型的拟合效果。公式为：

$$d_w^2 = \sum_{i=1}^n \left| \hat{C}_n(u_i, v_i) - \hat{C}_w(u_i, v_i) \right| \quad (12)$$

其中 W 表示某一类 Copula 模型的估计值， u_i, v_i 为边缘分布函数的估计值。欧式平方距离越小，理论 Copula 与经验 Copula 越接近，模型的拟合效果也就越好。

2. AIC、OLS 最小准则

除了欧式距离，AIC（赤池信息准则）和 OLS（均方根误差）也是常用的模型选择工具。AIC 兼顾了模型的拟合优度与复杂度，其标准形式为：

$$AIC = -2\ln(L) + 2m \quad (13)$$

其中 L 是 Copula 模型的最大似然函数值， m 是模型中参数的个数。AIC 值越小，表明模型在拟合优度与复杂度之间取得的平衡更好。

OLS 是均方误差的平方根，反映了模型预测值与经验值之间的平均偏差，表达为：

$$OLS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\hat{C}_n(u_i, v_i) - \hat{C}_w(u_i, v_i) \right)^2} \quad (14)$$

实际应用中通常以 AIC 和 OLS 值最小的 Copula 模型为最优模型。综合使用欧式距离、AIC 和 OLS 准则，可以有效提升模型选择的稳健性及准确性。

二、实证分析

(一) 数据选取与处理

本研究所用数据来自《中国巨灾损失统计年鉴》(2010—

2022 年) 及各地应急管理厅数据, 研究时段位 2004—2022 年, 选取中国不同地理区域的年度巨灾直接经济损失金额。为考察区域划分方式对相关性的影响, 我们设计了三种分组方案: 4 区域(东部、中部、西部、东北, 共 6 组区域对)、6 区域(东北、华北、华东、中南、西北、西南, 15 组区域对)、8 区域(东北、中部、华北、华南、江北、江南、西北、西南, 28 组区域对), 总计 49 组区域对, 每组包含 19 个年度观测值。我们首先对原始经济损失金额数据进行对数转换, 降低异方差, 并计算年度增长率序列作为分析对象。

描述性统计显示(表 1)。

地区	组别	增长率均值	最大值	偏度	峰度	JB 检验 h 值	JB 检验 p 值	Lilliefors 检验 h 值	Lilliefors 检验 p 值
东部	4	-0.010	0.556	-0.745	2.631	-	0.146	-	0.346
中部	4	0.035	0.637	0.183	2.032	-	0.500	-	0.340
西部	4	0.045	0.921	0.462	5.779	1.000	0.020	1.000	0.035
东北	4	-0.011	0.806	-0.260	2.269	-	0.500	-	0.664
东北	6	-0.011	0.806	-0.260	2.269	-	0.500	-	0.665
中南	6	0.042	0.665	0.108	1.595	-	0.195	-	0.408
华东	6	0.002	0.837	-0.775	2.379	-	0.112	-	0.063
华北	6	-0.010	0.717	0.026	2.306	-	0.500	-	0.929
西北	6	0.056	0.804	0.004	2.090	-	0.500	-	0.570
西南	6	0.046	1.095	0.824	6.631	1.000	0.006	-	0.071
东北	8	-0.011	0.806	-0.260	2.269	-	0.500	-	0.664
中部	8	0.021	0.788	-0.002	2.634	-	0.500	-	0.759
华北	8	-0.010	0.717	0.026	2.306	-	0.500	-	0.928
华南	8	0.077	0.977	0.406	2.013	-	0.291	-	0.099
江北	8	-0.078	0.939	-1.015	3.891	1.000	0.049	1.000	0.049
江南	8	0.022	0.966	0.089	2.258	-	0.500	-	0.311
西北	8	0.056	0.804	0.004	2.090	-	0.500	-	0.571
西南	8	0.046	1.095	0.824	6.631	1.000	0.006	-	0.074

从表 1 中的描述性统计结果可以看出, 各区域增长率均接近 0, 趋势不明显。多数区域的偏度绝对值小于 0.5, 说明分布近似对称。峰度方面西南地区最高, 达到 6.63, 具有显著的尖峰厚尾特征。而 Jarque-B 检验与 Lilliefors 检验结果则表明, 西部、西南、江北等区域显著拒绝正态分布假设, 在不宜强行采用参数分布。所有序列在概率积分变换后均通过均匀分布检验, 满足 Copula 建模条件。

本研究涉及的各区域损失增长率均为连续型变量, 满足 Copula 建模的连续边缘分布要求。我们采用非参数核密度估计(高斯核, 最优窗宽由积分均方误差确定)拟合边缘分布, 而后通过概率积分变换将原始观测转换为均匀分数序列 (U_i, V_j) 并检验其均匀性, 再对各个区域对分别进行高斯 Copula 与 t-Copula 拟合, 并基于 AIC、OLS 及欧式平方距离选择最优模型。至于 19 年样本量偏小的问题, 仍可通过伪极大似然估计给出有意义的相依性度量。

(二) 基于非参数核密度法确定边缘分布函数

如上一节提到, 本文采用非参数核密度估计法来拟合各区域

损失增长率的边缘分布。图 1 和图 2 分别展示了 6 区域情景下, 东北地区、西南地区损失增长率的核密度估计曲线与经验分布曲线的对比情况。虽然在数值上并不完全相同, 但仍然可以看出核密度估计曲线与经验分布曲线拟合效果良好, 能够准确捕捉样本分布特征, 为 Copula 建模提供可靠边缘分布输入。

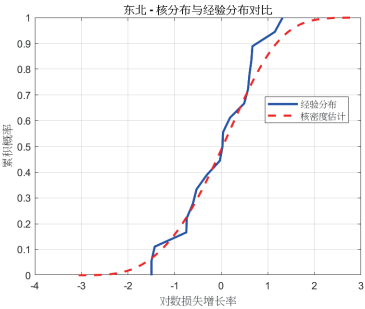


图 1 东北地区巨灾损失增长率核密度估计与经验分布对比

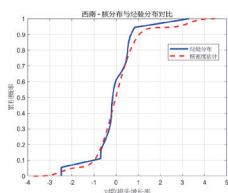


图2 西南地区巨灾损失增长率核密度估计与经验分布对比

(说明：以上2图中蓝色实线为经验分布曲线，红色点线为核密度估计曲线，两者重合度高。)

(三) Copula 模型求解与检验

1. Copula 函数模型的参数估计与相关性测度计算

对于基于核密度估计得到的均匀分布序列 (U_i, V_j) ，我们采用极大似然估计法分别对高斯 Copula 与 t-Copula 进行参数估计。表2展示部分区域对的参数估计结果及相关性测度。

表2 各区域对 Copula 参数估计及相关性测度

组别	地区1	地区2	高斯 Copula						T-Copula				
			ρ	Kendall τ	Spearman τ	λ_{up}	λ_{low}	ρ	ν	Kendall τ	Spearman τ	λ_{up}	λ_{low}
4	东部	中部	0.348	0.226	0.334	0	0	0.348	4.669E+06	0.226	0.334	0	0
4	东部	西部	0.121	0.077	0.115	0	0	0.121	1.482E+07	0.077	0.115	0	0
4	东部	东北	0.116	0.074	0.111	0	0	0.116	1.310E+07	0.074	0.111	0	0
4	中部	西部	0.409	0.268	0.393	0	0	0.409	1.388E+07	0.268	0.393	0	0
4	中部	东北	0.166	0.106	0.159	0	0	0.166	1.211E+07	0.106	0.159	0	0
4	西部	东北	0.123	0.079	0.118	0	0	0.193	2.883	0.124	0.185	0.182	0.182
6	东北	中南	-0.083	-0.053	-0.079	0	0	-0.121	4.500	-0.077	-0.116	0.041	0.041
6	东北	华东	0.067	0.043	0.064	0	0	0.067	1.514E+07	0.043	0.064	0	0
6	东北	华北	0.175	0.112	0.167	0	0	0.175	1.462E+07	0.112	0.167	0	0
6	东北	西北	0.126	0.080	0.120	0	0	0.200	1.892	0.128	0.191	0.262	0.262
6	东北	西南	-0.102	-0.065	-0.098	0	0	-0.102	4.669E+06	-0.065	-0.098	0	0
							...						
8	华南	西南	0.629	0.433	0.611	0	0	0.629	1.514E+07	0.433	0.611	0	0
8	江北	江南	0.454	0.300	0.437	0	0	0.454	1.227E+07	0.300	0.437	0	0
8	江北	西北	-0.016	-0.010	-0.015	0	0	-0.016	1.329E+07	-0.010	-0.015	0	0
8	江北	西南	0.228	0.146	0.218	0	0	0.228	4.669E+06	0.146	0.218	0	0
8	江南	西北	0.120	0.077	0.115	0	0	0.120	4.669E+06	0.077	0.115	0	0
8	江南	西南	0.375	0.245	0.361	0	0	0.375	1.311E+07	0.245	0.361	0	0
8	西北	西南	0.678	0.474	0.661	0	0	0.652	1.381	0.452	0.634	0.542	0.542

表2的结果显示 t-Copula 的参数估计呈现较为明显的两极分化特征。在第一类无尾部依赖的区域对中，多数区域对自由度 ν 极大（如 4.67×10^6 ），尾部相关系数 $\lambda = 0$ ，且 ρ 与高斯 Copula 一致（例如东部-中部、东北-华东等），体现了其 t-Copula 退化为高斯 Copula，区域间的损失相依结构可被视为对称且尾部渐近独立。

第二类存在尾部依赖的区域对则存在较小的 ν （1.38-2.88）， λ 也显著非零。以西部-东北、西北-西南区域对为例，他们地理邻近、灾害类型相近，其损失增长率序列也表现出较高的峰度与偏度（西南地区峰度6.63，西部峰度5.78），为 t-Copula 捕捉尾部依赖提供了数据基础。

整体相关性方面，各区域对的 Kendall τ 和 Spearman ρ 介于 -0.5至0.7之间，多数呈中等正相关，部分区域对如中南-西

北存在较强的相关性，少数则存在微弱负相关。存在尾部依赖的区域对中，t-Copula 估计的尾部相关系数高于高斯 Copula 的零值，说明 t-Copula 更能捕捉极端损失的并发风险。

2. 最优 Copula 函数的选择

本研究以经验 Copula 为基准，综合运用欧式平方距离、AIC 与 OLS 准则进行最优 Copula 选择。如前文所述，AIC 兼顾拟合优度与复杂度，适用于小样本情景；欧式距离与 OLS 则直接度量理论 Copula 与经验 Copula 的偏差。

图3箱线图显示，t-Copula 的 AIC 值整体低于高斯 Copula 且分布更集中：在49组区域对的选优结果中，t-Copula 胜出28组（57.14%），其平均欧式距离（0.0486）、AIC（-103.16）、OLS（0.0514）均优于高斯 Copula。

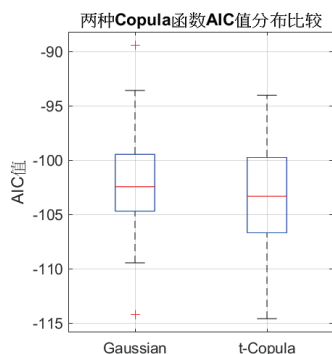


图3. 两种 Copula 模型 AIC 值分布箱线图

从平均指标结果来看，t-Copula 普遍优于高斯 Copula，其中欧式距离（0.0486 vs 0.0565）、AIC（-103.16 vs -102.28）、OLS（0.0514 vs 0.0556）。具体到各个区域组别的结果来看，两种类型 Copula 的胜出率存在较大差异，且呈现区域划分越细，厚尾特征越突出，t-Copula 优势越明显的趋势。

4 区域情景中，t-Copula 在 6 区域对中全部胜出。该组区域的划分最简略，但地理邻近性与灾害同源性突出，t-Copula 的尾部依赖刻画能力得以充分发挥。

6 区域情景中，t-Copula 在 15 个区域对中胜出 6 次，高斯 Copula 则胜出 9 次。该区域分组情景下各区域尾部特征不显著，高斯 Copula 足以进行描述。

8 区域情境下，t-Copula 胜出 16 次，高斯 Copula 胜出 12 次。

该区域分组情景下西南、西北地区的峰度高，各区域更为明显的尖峰厚尾特征便于 t-Copula 体现优势。

三、结论

本研究通过对中国 2004 至 2022 年间，不同区域巨灾损失相关性结构开展实证分析后，得到以下主要结论：

整体而言 t-Copula 更适配中国巨灾损失数据特点。尾部对称且渐近独立的区域对，相依结构近似高斯 Copula；地理邻近、灾害同源性高的区域对则存在显著尾部依赖，极端风险同步性强，t-Copula 的描述性更强。区域划分的细致度显著影响模型选择结果，细化区域更易体现灾害异质性与尾部特征，t-Copula 优势更突出。

本研究的结果在实践层面具备明确的应用价值，再保险定价与风险共担机制研究需要赋予高尾部依赖区域更高的极端风险权重，而对尾部独立区域则可采用高斯 Copula 简化模型，提升研究所需大规模组合运算的效率。

本文仍存在改进空间：目前样本长度有限可能影响尾部参数识别精度，而受制于数据获取渠道而采用的未按洪水、地震、台风等灾害类型拆分建模的做法，则可能掩盖不同灾害的相依异质性。未来的研究可考虑遵循延长数据序列和开展灾害类型分层建模的方向则进行。更进一步地，可以考虑引入动态 Copula，达到提升模型对巨灾风险时空相依结构刻画能力的目的。

参考文献

- [1] 闫海波、沙龙. 中国金融业风险溢出预警研究——基于藤 Copula CoVaR 模型 [J]. 金融发展评论, 2024(08): 1-16.
- [2] 王沛瑶. 基于 GARCH-Copula-CoVaR 模型的金融科技行业对传统金融业风险溢出效应探究 [J]. 企业改革与管理, 2024(08): 110-112.
- [3] 王阳. 基于 R-Vine Copula 的财险业务保险风险经济资本测量 [J]. 金融理论探索, 2021(04): 66-80.
- [4] Tian Jing. Dependence Analysis of Insurance Businesses Based on Hierarchical Archimedean Copula Function [J]. Journal of Physics: Conference Series, Volume 1952, Issue 4, 2021.
- [5] 韩明洋. 基于 Copula 函数的定价模型：以山东省玉米为例 [J]. 山西农经, 2024(24): 96-99.
- [6] Rusyda H. A.; Noviyanti L.; Soleh A. Z.; Chadidjah A.; Indrayatna F., The design of multiple crop insurance in Indonesia based on revenue risk using the copula model approach [J]. Journal of Applied Statistics, Volume 48, Issue 13-15, 2021.
- [7] 王森, 石焱, 胡明形, 邵杨, 周文琪, 卢妍洁. 基于 Copula 模型的江西省森林综合保险纯费率厘定的研究 [J]. 林业经济问题, 2025, 45(01): 101-112.
- [8] 韩浩, 王向楠, 刘璐. 保险业系统性风险及对相关行业的溢出效应研究 [J]. 保险研究, 2020(07): 31-48.
- [9] 肖宇谷, 杨晓波, 齐纪元. 我国农业保险大灾风险的空间分散效应测度与应用研究 [J]. 保险研究, 2022(07): 58-68.
- [10] 何树红, 黄振雄, 郑尚平. 基于 Copula 模型的云南省地质灾害风险评估研究 [J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2023, 45(02): 256-265.
- [11] 孟宜成. 基于极值 Copula 和上尾 copula 的极端事件巨额损失统计推理研究 [J]. 兰州文理学院学报 (自然科学版), 2021, 35(03): 21-26.