

教育数学思想下中学极限概念的教学衔接研究

胡志安^{1,2}, 徐洪焱¹, 李弘³

1. 宿迁学院数理学院, 江苏 宿迁 223800

2. 青海师范大学数学与统计学院, 青海 西宁 810016

3. 赣南师范大学科研处, 江西 赣州 341000

DOI:10.61369/ASDS.2026060005

摘 要 : 极限概念是连接初等数学与高等数学的关键纽带, 其教学衔接质量直接影响学生数学思维的深化与知识体系的进阶。本研究针对当前初高中与大学微积分课程中极限教学存在的断层问题, 结合对城乡普通高中学生学习现状的调研数据, 指出教学改进的迫切性。基于张景中院士提出的教育数学思想, 研究尝试从教学理念与内容呈现两方面进行重构: 一方面, 以刘徽“割圆术”、“一尺之捶”等经典极限思想案例为认知起点, 降低形式化理解的难度; 另一方面, 依托自然数列、不等式等学生熟悉的知识载体, 设计符合学生认知节奏的教学路径。在此基础上, 论文进一步开发出可供课堂使用的具体教学案例, 旨在为强化中学阶段的极限概念教学提供具有操作性的参考, 促进知识体系从直观到严谨的自然过渡。

关 键 词 : 教育数学; 极限; 衔接教学; 中学数学

Grounded in Educational Mathematical Thinking: Research on the Cognitive Progression and Teaching Integration of the Concept of Limits in Middle School

Hu Zhi'an^{1,2}, Xu Hongyan¹, Li Hong³

1. School of Mathematics and Physics, Suqian University, Suqian, Jiangsu 223800

2. School of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining, Qinghai 810016

3. Office of Research, Gannan Normal University, Ganzhou, Jiangxi 341000

Abstract : The concept of limits is a key link between elementary mathematics and advanced mathematics, and the quality of its teaching connection directly affects the deepening of students' mathematical thinking and the advancement of their knowledge system. This study aims to address the gap in extreme teaching in calculus courses between middle and high schools, as well as universities. Based on research data on the learning status of urban and rural high school students, it points out the urgency of teaching improvement. Based on the educational mathematics ideas proposed by Academician Zhang Jingzhong, this study attempts to reconstruct teaching concepts and content presentation from two aspects: on the one hand, using typical extreme thinking cases such as Liu Hui's "cutting circle technique" and "one foot hammer" as cognitive starting points to reduce the difficulty of formal understanding; On the other hand, relying on familiar knowledge carriers such as natural sequences and inequalities, design teaching paths that conform to students' cognitive rhythms. On this basis, the paper further develops specific teaching cases that can be used in the classroom, aiming to provide operational references for strengthening the teaching of extreme concepts in middle school, and promote the natural transition of the knowledge system from intuitive to rigorous.

Keywords : educational mathematics; limit; bridging teaching; middle school mathematics

引言

极限思想是现代数学学科发展的重要理论基础, 贯穿中学数学和高等数学的知识体系, 它不仅是导数、微分、积分等核心知识的必

基金项目: 研究生创新基金项目(2025LPCX26); 中国高等教育学会高等教育科学研究规划课题重点项目(24SX0206)。

作者简介:

胡志安, 安徽池州人, 硕士, 研究方向: 中学数学教育;

徐洪焱, 江西乐平人, 教授, 研究方向: 复分析理论及其应用;

李弘, 江西赣州人, 副教授, 研究方向: 心理统计与测量, 教育心理学。

要前置知识，学习意义重大^[1]。在数学史上，极限思想的应用同样丰富。我国魏晋数学家刘徽就提出过“割圆术”，使用不断增加圆内接正多边形边数的方法以正多边形面积持续逼近圆面积从而较为准确地推出圆周率的近似值。在古代文学上，《庄子》中有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”这种用形象通俗的语言诠释极限思想的例子。在现代中学数学教学中极限不仅是必修知识的重要组成部分，还是学生衔接后续高等数学学习的关键桥梁^[2]。

然而当前中学数学教材中对极限概念的教学仍然存在一定程度上的概念表述模糊化、内容碎片化和思维引导片面化的问题^[3]。

基于当前极限概念教学中的一些难点和不足，我国中科院院士张景中教授在其建构的教育数学理论框架下，创造性地提出以学生更加熟悉的自然数列、不等式等知识点为核心的极限新定义，绕开以往抽象难懂的逻辑表述从而符合学生常规认知水平，不失为重构中学极限概念教学的新思路^[4]。

一、极限概念在初高等数学中教学的衔接现状

（一）初高等数学极限教学衔接的不足

当前，中学数学教材中对极限概念的教学存在显著的模糊和一笔带过的现象，仿佛极限概念只是一个为研究函数导数和函数性质的附庸。首先具体表现为概念表述模糊化，往往以“无限趋近”这类直观描述代替严谨定义，逻辑性不强，学生认知常常停留在字面；其次是内容碎片化，与数学其他知识板块联系不够紧密，人教版选择性必修二里直接提出极限与导数概念割裂感强，且极限的“ $\varepsilon - \delta$ ”语言表述艰难晦涩，显著区别于以往中学数学语言，知识脉络不够清晰；最后是思维引导的片面化，忽视学生无限与逼近思维逻辑的培养，侧重公式记忆与习题练习的倾向严重，不注重对极限概念本质的理解^[5]。

从实际学习场景来看，中学极限教学是直接为高考服务的，表现为聚焦公式记忆和函数习题练习，忽视与高等数学关联知识的铺垫与衔接^[6]。例如中学导数教学时仅靠极限概念的直观定义推导出各类函数的导数公式，对极限与导数的内部逻辑关系介绍不够深入，极限的工具属性严重，而这一重使用轻理解的倾向与高等数学培养严谨逻辑思维能力的取向严重脱钩，无疑加剧了极限概念的衔接矛盾。

（二）城乡普高学生极限概念的学习现状调查

为进一步验证中学极限教学改进的可行性与必要性，本研究以江苏省宿迁市城乡各一所普通高中学生为调查对象，共发放问卷540份，有效回收问卷509份（城区普高300份、乡镇普高240份），具体调查结果如下表：

表：中学生极限概念学习现状调查汇总表

调查维度	具体调查内容	整体情况（占比/数值）	城区普高情况	乡镇普高情况
基础调查信息	发放问卷数量	540份	300份	240份
	有效回收问卷数量	509份	291份	218份
概念理解	能准确阐述极限本质	23.1%	29.1%	17.2%
	仅能通过“无线趋近”描述	68.5%	61.8%	75.3%
	完全无法理解极限含义	8.4%	7.5%	9.1%
衔接认知	不清楚极限与微积分的联系	79.3%	75.6%	83.0%
	了解极限是大学微积分的基础	12.5%	15.3%	9.8%
学习困惑	认为极限概念抽象难懂	65.7%	61.0%	70.3%
	无法掌握极限与相关知识的应用	58.2%	54.0%	62.3%

问卷调查结果显示：对于概念理解层面，仅23.1%的学生能准确阐述极限本质，68.5%的学生仅能通过“无限趋近”描述极限，8.4%的学生完全无法理解极限含义，乡镇普高学生对极限概念准确认知的占比（17.2%）低于城区普高（29.1%）；对于衔接认知层面，79.3%的学生不清楚中学极限与高等数学微积分的关联，仅12.5%的学生了解中学极限是大学微积分的基础；对于学习困惑层面，65.7%的学生认为极限概念抽象难懂，58.2%的学生表示无法掌握极限与关联知识的融合应用，整体来看乡镇普高学生困惑占比略高于城区普高。

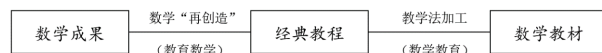
由调查结果可以发现当前高中生极限学习存在概念认知模糊、衔接认知缺乏、知识联系和应用能力不足等问题；且无论是城区学生还是乡镇学生都受到现行极限教学不足的影响，中学极

限教学的改进具有一定的必要性。同时学生对极限知识的学习需求是明确的，且需要更加科学的教学引导，因此在进行中学极限教学时结合张景中院士的教育数学思想优化教学方式具有现实可行性^[7]。

二、教育数学思想指导下的中学极限概念教学策略

（一）教育数学思想

张景中院士提出的教育数学思想核心是“改造数学知识结构，使其更适合教学与学习”，主张摒弃数学知识里冗余、抽象的表述，提炼核心逻辑与本质属性，使数学知识更加符合学生的认识水平从而达到重新建构知识体系的目的^[8]。



图：教育数学示意图

在极限概念的教学，教育数学思想打破“直观描述”的教学逻辑，以贴近中学生认知、兼顾严谨性与易懂性为目标，重构极限概念的表述，一方面可以弥补现行教学过程中的严谨性不足，另一方面也避免了使用高等数学教材中魏尔斯特拉斯提出的“ $\varepsilon - \delta$ ”或“ $\varepsilon - N$ ”的高度抽象极限语言^[9]。

（二）教育数学思想下的极限概念

张景中院士提出的中学极限概念教学，以自然数列、不等式这些学生头脑里已有的知识为核心联结，简化概念推导逻辑，降低认知难度。具体教学方式如下：

定义1（无穷大数列的定义）设 a_n 是一数列，如果有无界不减数列 D_n ，使得 $|a_n| > D_n$ 对所有的 n 都成立，则称 a_n 为无穷大数列。

定义2（无穷小数列的定义）设 a_n 是一数列，如果有无界不减数列 D_n ，使得 $|a_n| < D_n$ 对所有的 n 都成立，则称 a_n 为无穷小数列。

于是极限概念就瓜熟蒂落了；

定义3（极限的定义）设 a_n 是一数列，如果有实数 A ，使得数列 $\{a_n - A\}$ 是无穷小数列，则称数列 a_n 以 A 为极限。

像这样在学生已学过的概念基础上平易自然地引入极限概念，没有逻辑上的跳跃，学生不但容易接受新知识，还巩固了旧知识^[10]。

（三）教育数学思想下的极限概念教学的核心原则与策略

通过查阅大量文献和资料，可以大致将教育数学思想指导下的极限概念教学归结为以下三大核心原则^[11]：

1. 认知适配原则。贴合高中生抽象思维发展阶段，以已学知识为基础重构极限概念，避免超认知水平的抽象表述，保障学生能逐步理解概念本质；

2. 严谨性与易懂性平衡原则。既保留极限概念的逻辑严谨性，又通过简化表述、具象载体降低学习难度，杜绝“重直观轻严谨”或“重严谨轻易懂”的片面教学；

3. 知识衔接原则。教学中强化极限与中学关联知识、高等数学前置知识的关联，帮助学生构建完整的知识脉络，为后续学习铺垫基础。

同时可以在极限概念教学中融入三大核心教学策略^[12]：

1. 具象化导入策略。可以结合刘徽的割圆术、“一尺之棰”等经典案例，将抽象极限概念转化为具象场景，帮助学生快速建立初步认知；

2. 循序渐进教学策略。按“自然数列感知→不等式定义推导→概念应用深化”的步骤开展教学，逐步提升知识难度，符合学生认知发展规律；

3. 互动探究教学策略。通过设计数列分析、不等式应用等探究任务，引导学生自主分析、合作讨论，主动构建极限概念认知，培养逻辑推理能力，用科学的原则与实用的策略帮助学生掌握

握极限的概念。

三、教育数学思想下的极限概念的教学设计

下面介绍教育数学思想下的极限概念的教学设计。

（一）教学目标

1. 以自然数列和不等式为知识联结点，构建极限概念的直观理解与严谨表述，掌握极限的核心内涵。

2. 经历极限概念从具体到抽象的形成过程，体会教育数学“从初等数学自然延伸至高等数学”的思想，提升数学抽象、逻辑推理素养。

（二）教学过程

教学活动1：复习联结，唤醒旧知

问题1. 同学们，我们已经学习了自然数列（1,2,3, …… n ），请大家思考，自然数列的项有什么变化趋势？再回忆一下不等式的性质，比如“若 $a < b, c > 0$ ，则 $ac < bc$ ”，这些知识能为我们今天的学习带来什么启发吗？

师生活动：教师引导学生回顾自然数列的无限性（项可以无限增大），以及不等式的基本运算性质。学生分组讨论后分享观点，教师总结：自然数列的“无限”和不等式的“精确刻画”，是理解“极限”重要工具。

设计意图：从学生已熟悉的自然数列、不等式知识切入，契合中学阶段的认知基础，降低概念学习的陌生感。

教学活动2：情境探究，初步感知

问题2. 假设小胡在直线上跑步，第一秒跑1米，第二秒跑 $\frac{1}{2}$ 米，第三秒跑 $\frac{1}{4}$ 米，第四秒跑 $\frac{1}{8}$ 米……按照这个规律，小胡跑的总路程会超过2米吗？你能结合自然数列和不等式，说明其中的道理吗？

师生活动：教师呈现问题后，学生先独立思考，再进行小组交流。有学生可能会列出总路程的表达式 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ ，教师引导学生利用数列求和公式得出 $S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ 。接着教师追问：“对于任意给定的正数 c 能否找到一个自然数 N ，使得当 $n > N$ 时， $|S_n - 2| < c$ 恒成立？”学生通过赋值计算（如 $c = 0.1$ 时，解 $\frac{1}{2^{n-1}} < 0.1$ ，得 $n > 4$ ），体会“通过自然数列和不等式，精确刻画总路程与2的接近程度”。

设计意图：以“跑步路程”的生活情境为载体，将抽象的极限概念具象化，符合中学生的具象思维特点，体现“初等知识解决高等问题雏形”的衔接逻辑。

教学活动3：抽象概括，形成概念

问题3. 我们把刚才的例子推广到一般情况：对于数列 $\{a_n\}$ 和常数 A ，若对于任意给定的正数 c 都存在自然数 N ，使得当 $n > N$ 时， $|a_n - A| < c$ 成立，就称数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A 。请大家结合自然数列（ N 的作用）和不等式（ $|a_n - A| < c$ 的刻画），说说这个定义的核心意思。

设计意图：先抽象出形式化定义，再引导学生用通俗语言解读，实现“严谨定义”与“易懂理解”的平衡；让学生经历“具象→抽象→解读”的过程，适配中学阶段从具象思维向抽象思维

过渡的认知特点。

教学活动4：应用拓展，联系生活

问题4. 生活中也有极限的影子，比如“圆的内接正多边形面积无限接近圆的面积”。请大家尝试用极限定义的语言，描述这个过程（提示：设正 n 边形面积为 S_n ，圆面积为 S ）。

师生活动：将班级学生分组并开始尝试进行数学语言表述，最终引导出“对于任意 $c>0$ ，存在自然数 N ，当 $n>N$ 时， $|S_n - S|<c$ ”。教师总结这体现了张景中先生强调的“数学概念源于生活又高于生活，通过初等知识的联结点（自然数列、不等式），能严谨解释生活中具体的“无限过程”。

设计意图：从生活中的“圆面积逼近”现象切入，让学生感受极限概念的现实意义，契合其“从生活到数学”的认知路径；再次强化“自然数列、不等式”作为初等数学与高等数学联结点的作用，体现知识的连贯性。

四、教学反思

基于教育数学思想的极限概念教学设计，可以将相对抽象的极限概念回归到学生已掌握的自然数列、不等式等初等数学知识，能够有效实现学生认知水平和能力实践的平稳过渡^[13]。相较于传统教学中直观描述有余而严谨性不足从而导致学生在学习中认知超载的问题，本研究设计通过经典案例具象导入、旧知联结自然过渡、探究任务驱动建构，既在一定程度上保留了数学概念的逻辑严谨性，又贴合高中生由具体到抽象、由静态到动态的思维发展规律。

在教学设计过程中，学生能够借助生活情境与几何直观来理解极限概念“无限逼近”的内涵，用不等式语言刻画极限过程，初步建立起极限的严谨认知。但反思整个研究设计过程，仍存在可优化空间：一是对不同层次学生（尤其是城乡基础差异学生）的个性化引导仍可加强；二是对于动态可视化工具的融入深度不足，对极限的“动态过程”的直观呈现可进一步提升；三是课堂探究时间分配需更灵活，以保证更多学生完整参与概念建构的全过程。

总体而言，教育数学指导下的教学设计将极限这一抽象概念

“返璞归真”为学生熟悉的自然数列增长和不等式距离刻画，既体现了数学学科的严谨性，又契合中学阶段的认知水平，充分体现了张景中院士教育数学思想中“让数学平易近人、让概念自然生长”的核心理念^[14]，同时发展了学生的数学抽象、逻辑推理等核心素养。

五、研究意义

从教学实践来看，该研究针对初高等数学极限教学断层问题，结合城乡学生调研数据，精准定位概念模糊、衔接缺失等痛点，为中学极限教学提供可落地的优化方案，通过教育数学思想重构极限概念呈现方式，降低严谨定义的认知门槛，有助于提升课堂教学效率，增强学生数学学习信心，为导数、微分、积分等后续内容奠定稳固的概念基础与思维基础。

从学科发展来看，研究以极限概念为切入点，丰富了教育数学思想在中学数学核心概念教学中的应用案例，为初等数学与高等数学衔接教学提供新思路。它建构了一个层层递进的概念教学体系，对推动中学数学核心概念教学的科学化、系统化具有一定参考价值。

从基础教育人才培养来看，极限是学生从“有限数学”走向“无限数学”的重要节点，是培养数学抽象、逻辑推理、直观想象等核心素养的重要载体。优化极限概念的教学，能够帮助学生建立无限与逼近的辩证思维，培养理性精神与数学素养，为理工科、经济金融类专业人才培养筑牢数学根基。

六、展望

当下，国内外 AI 技术的快速发展，自然也引发了人们的新的深层思考，探索 AI 技术与该教学方案的融合，如开发智能题库，根据学生对数列、不等式的掌握情况，个性化推送极限概念练习题将是未来研究方向之一；同时将该思想延伸至函数、几何等其他数学知识点，形成更系统的教育数学教学体系也是未来研究的一个可能方向。

参考文献

- [1] 付夕联, 张玉峰. 极限概念教学的系统分析 [J]. 数学教育学报, 2013, 22(01): 83-88.
- [2] 周晨. 初等数学与高等数学衔接问题的研究 [D]. 南京师范大学, 2018.
- [3] 杨欢. 基于“中大学”衔接的高中导数教学策略研究 [D]. 西南大学, 2024.
- [4] 张晓东. 教育数学的理解与应用——访张景中院士 [J]. 高中数学教与学, 2022, (16): 1-4+28.
- [5] 许艳红. 高中生对极限概念理解的研究 [D]. 东北师范大学, 2015.
- [6] 王思义. 高中数学与高等数学在极限教学方面的衔接 [J]. 考试周刊, 2009, (32): 75.
- [7] 易斌, 郝圆. 张景中院士教育数学思想与微课融合的应用探索 [J]. 数学通讯, 2024, (13): 10-14.
- [8] 张景中. 什么是“教育数学” [J]. 高等数学研究, 2004(6).
- [9] 陈怡菁. 基于数学核心素养的概念课教学设计——以“数列的极限”为例 [J]. 上海中学数学, 2021, (11): 34-38.
- [10] 赵怀广, 杨晓琴. 张景中数学实验教学中培养学生高阶思维实践研究 [J]. 智力, 2024, (02): 45-48.
- [11] 范琪. 数学家张景中：用“教育数学”为“数学教育”做减法 [J]. 教育家, 2023, (16): 23-26.
- [12] 刘若晴. 基于张景中教育数学思想的初中数学新授知识类微课优化策略及应用研究 [D]. 广西师范大学, 2022.
- [13] 胡晓, 肖继红, 李世伦. 非系统极限定义的实验 [J]. 江西科学, 2018, 36(04): 582-587.
- [14] 张景中, 余孟孟. 让数学变容易：张景中院士谈人生与教育 [J]. 新课程评论, 2025, (10): 7-14.