全概率公式与数列探究课的教学设计

冯振国
上海市延安中学，上海 200336

DOI: 10.61369/VDE.2025280024

摘　　要： 条件概率是概率初步的续篇，条件概率表示所考察的事件在其他事件发生的条件下的概率，是概率论中的一个重要概念，由条件概率得到的三个公式中的全概率公式是计算概率的重要公式。在本文中，主要通过摸球模型来探究全概率公式的应用；当摸球次数较多时，利用全概率公式可以推出概率数列模型，进而利用数列知识解决概率问题。

关 键 词： 条件概率；全概率公式；数列递推

Teaching Design of Inquiry Course on Total Probability Formula and Sequence

Feng Zhenguo
Shanghai Yan'an High School, Shanghai 200336

Abstract： Conditional probability is a continuation of the introduction to probability. It refers to the probability of an event under the condition that another event has occurred, and is an important concept in probability theory. Among the three formulas derived from conditional probability, the total probability formula is a key formula for calculating probabilities. In this paper, the application of the total probability formula is mainly explored through the ball-drawing model. When the number of ball-drawing trials is large, the total probability formula can be used to derive a probability sequence model, and then sequence knowledge can be applied to solve probability problems.

Keywords： **conditional probability; total probability formula; sequence recurrence**

引言

全概率公式这一部分内容是沪教版选择性必修第二册第7章的内容，是必修第三册概率初步的续篇。条件概率表示所考察的事件在其他事件发生的条件下的概率，是概率论中的一个重要概念，由条件概率得到的三个公式中的全概率公式是计算概率的重要公式，这一部分内容使得高中概率知识体系更为完整[1]。

一、学情分析

学生已经学习了条件概率与相关公式，并能根据公式计算较为复杂的概率问题，比如，当问题与试验次数有关时，同学们可以通过枚举的方法解决试验次数为1次、2次、3次等时的问题，但试验次数较多时，同学们再利用枚举的方法解决问题显得力不从心[2]。

（一）教学目标

1. 能综合运用全概率公式与数列知识来分析与解决问题。

2. 经历“实际问题－数学抽象－模型构建－模型求解”的完整过程，领悟转化与化归思想，发展数学建模、逻辑推理、数学运算等核心素养[3]。

3. 进一步体会全概率公式在解决现实问题中的广泛应用与重要价值，激发数学学习兴趣，增强应用意识。

（二）教学重点与难点

教学重点：对于实际问题，利用全概率公式建立递推关系式。

教学难点：从实际情境中提取关键变量，构建合理的概率递推关系[4]。

二、教学过程

（一）趣味导入，温故引新

良好的开始是成功的一半。课堂导入作为连接学生新知与旧知的桥梁，直接影响着数学教学质量。尤其是趣味化、情境化的教学设计能够让学生快速进入学习状态，充分抓住他们的注意力，调动他们的思维活力，从而激发他们的学习兴趣，引领他们的思考、探究与学习。因此，在全概率公式与数列探究课的教学

作者简介：冯振国，博士研究生，研究方向：微分方程、高中数学教育。

过程中，首先要注重导入环节的科学设计，重点运用情境化的课程导入来引领学生温故知新，为他们后续的学习和探究做好铺垫。

在本节课当中，以生活中的实例为引来创设情境。具体来说，先抛出“抽奖游戏”这一生活中常见的案例，让学生聊一聊自己的相关经历，谈一谈其中的规律和特点，从而活跃课堂气氛，激发学生的学习兴趣。在此基础上，可以提出一些随机问题，引发学生的深入思考：“在抽奖游戏中，每次抽奖的结果会影响下一次的中奖概率，若多次重复抽奖，如何计算第 n 次中奖的概率？”以此来激发学生的思维活力和对新知识的探究欲，为后续高效教学奠定坚实基础[5]。

（二）复习回顾，夯实基础

在导入环节之后，应当及时开展复习回顾。需要注意的是，复习回顾并非简单的知识重复，而是通过典型例题的解析，帮助学生梳理核心知识的内在逻辑，优化公式的应用条件与解题思路，同时提炼例题中的数学思想与解题方法，为后续复杂问题的探究搭建知识与方法的支架，让学生能快速将旧知迁移到新知探究中[6]。

在本节课当中选用沪教版选必2第7章第1节例5的习题，带领学生完整思考分析经典的“罐中摸球交换”问题。

设有两个罐子，A 罐中放有2个白球、1个黑球，B 罐中放有3个白球，这些球的大小与质地相同。现在从两个罐子中各摸1个球并交换，求这样交换：

①1次后，黑球还在 A 罐中的概率。

②2次后，黑球还在 A 罐中的概率。

分析：第一小问交换1次后，黑球还在 A 罐中的概率当且仅当在 A 罐中摸1个白球，在 B 罐中摸1个白球，属于古典概率模型；第二小问交换2次后，黑球还在 A 罐中的概率取决于交换1次后黑球在哪个罐中，此时有两种情况，在 A 罐中，或在 B 罐中，这样问题转化为全概率问题，交换1次后黑球在 A 罐中或在 B 罐中是两个不同时发生的事件，交换2次后黑球在 A 罐中可以看作在不同情况下分别发生。

通过例题回顾复习了一个模型、一个概念、三个公式，即古典概率模型、条件概率、条件概率公式、乘法公式、全概率公式。在解决过程中主要运用了分类思想，即交换1次后会有两种情况，交换两次后的结果是在交换一次后的情况下发生的，这是解决此类问题的关键点，也是大部分同学的难点，即使能够想到，但是未必可以灵活运用到当交换多次后的情况，这也是此次探究课的教学目标：当试验次数较多时如何解决？

（三）合作探究，模型构建

小组合作作为新课标所倡导的教育模式，是促进学生思维能力发展和助力核心素养教育目标落实的重要途径。该模式的应用主要是引导学生以合作化的方式来进行互动交流、深度探究，是促进学生自主学习以及合作交流能力培养的有效途径[7]。而针对多次实验的概率求解问题，可以依托该模式来促进学生思考探究。期间，首先基于学生的学情、学习能力等实际情况，在班内划分出多个实力相当的数学小组，以此来促进组与组之间的相互竞争和对比，激发学生的学习兴趣，引领组内部的相互交流与互动，助力学生的相互学习和整体提升[8]。在此基础上，引入选必2第7章拓展与思考第2题，促进学生的合作互动，引领他们构建模型和深度探索。

选必2第7章拓展与思考第2题：

设有两个罐子，A 罐中放有2个白球、1个黑球，B 罐中放有3个白球，这些球的大小与质地相同。现在从两个罐子中各摸1个球进行交换，求这样交换3次后，黑球还在 A 罐中的概率，交换 n 次后呢？

小组分析：这个问题是上一部分中的问题的继续，上一部分讨论交换两次后，黑球还在 A 罐中的概率，在这一部分主要讨论交换多次后，黑球还在 A 罐中的概率，对于交换三次后，会有四种情况：第一种情况是在 A 罐中三次全摸到白球；第二种情况是在 A 罐中仅第二次摸到黑球；第三种情况是在 A 罐中仅第一次摸到黑球，在 B 罐中第二次摸到黑球；第四种情况是在 A 罐中仅第一次摸到黑球，在 B 罐中第三次摸到黑球，若这样分析，交换四次、五次、„„ 等的情况会逐渐增加，难于计算。

借鉴复习回顾中的关键分析：交换两次后的结果是在交换一次后的情况下发生的，依次类推：交换三次后的结果是在交换二次后的情况下发生的，设事件 Ai 表示“交换 i 次后黑球还在 A 罐中”，其中 i 为正整数，则根据全概率公式可得：

$P(A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_2)$

故交换 n 次后，黑球还在 A 罐中的概率可表示为：

$$P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A_{n-1}})P(A_n|\overline{A_{n-1}}) \qquad (1)$$

其中 P(An|An-1）表示黑球在 A 罐中、再次交换后还在 A 罐中的条件概率，即

$P(A_n|A_{n-1})=2$；$P(A_n|A_{n-1})$ 表示黑球在 B 罐中、再次交换后回到 A 罐中的条件概率，即 $P(A_n|\overline{A_{n-1}})=\frac{1}{3}$，则式（1）转化为：

$$P(A_n)=\frac{1}{3}P(A_{n-1})+\frac{1}{3},P(A_1)=\frac{2}{3},n>1. \qquad (2)$$

式（2）为数列递推式，根据数列的相关知识，构造等比数列，进而求得：

$$P(A_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},n\geq 1.$$

通过组织学生小组式地讨论、交流，让他们感受直接分类讨论的繁琐，进而去思考有没有更为恰当的思想方法去分析问题：下一次的结果是因为上一次的原因导致的，进而建立递推关系式，利用数列相关知识进行求解。

未来状态 An+1 只受当前状态 An 的影响，与之前的 An-1，An-2，„„，A1状态无关，也称为无记忆性，这样的过程也称为马尔科夫过程

（三）深化应用，综合提升

学生知识掌握的最关键点在于推动他们由理论认知到实践应用，以此来强化他们的数学认知，促进他们的数学理解，推动他们数学能力与素养培养[9]。对此，在小组合作探究的基础上，可以设置一些复杂的问题，引发学生的思考，促进他们知识迁移和学以致用。本节将摸球模型从“单黑球”拓展到“双黑球”，以此

来让学生能够在新的情境中运用全概率公式构建递推模型，同时结合分布列、数学期望等知识进行求解，实现概率知识的综合应用，突破本节课的教学难点[10]。

设有两个罐子，A、B 两个罐中各装有 2 个白球、1 个黑球，这些球的大小与质地相同。现在从两个罐子中各摸 1 个球进行交换，求这样交换 n 次后，A 罐中黑球个数的分布以及数学期望？

在这一部分是更为复杂的情境：两个罐中都有黑球的情况。首先，无论交换多少次，A 罐中黑球个数可能为：0、1、2 三种情况。A 罐中0 个黑球等价于 B 罐中 2 个黑球，即 A 罐中0 个黑球的概率等于 B 罐中 2 个黑球的概率，而 A、B 罐是对称的，进而 A 罐中0 个黑球的概率等于 A 罐中 2 个黑球的概率，再根据概率和为 1，只需计算 A 罐中 1 个黑球的概率。

结合上两部分的思想，交换 n 次后 A 罐中 1 个黑球依赖于交换 n-1 次后的情况，交换 n-1 次后会有三种情况：0、1、2，利用全概率公式得：

Pn

$$=\frac{1-P_{n-1}}{2}\Big(P(X_n=1|X_{n-1}=0)+P(X_n=1|X_{n-1}=2)\Big)+P_{n-1}P(X_n=1|X_{n-1}=1).\quad（3）$$

通过计算条件概率，式（3）可转化为：

$$P_n=\frac{1-P_{n-1}}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+P_{n-1}\cdot\frac{5}{9}=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}P_{n-1},$$

根据数列相关知识，可得：

$$P_n=\frac{3}{5}-\frac{2}{45}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1},n\geq 1.\quad（4）$$

进而得分布：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1-P_n}{2} & P_n & \frac{1-P_n}{2} \end{pmatrix},$$

进而求得期望为 1。

对于如上问题，从整体的角度来看，A 罐中黑球个数的数学期望与 B 罐中黑球个数的数学期望一致。想求 A 罐中黑球个数的数学期望，可以先求两个随机变量和的数学期望，而两个随机变量和的取值为 2，故两个随机变量和的数学期望为 2，则可得 A 罐中黑球个数的数学期望为 1。

（四）课堂小结，梳理升华

课堂小结是对本节课知识与方法的系统梳理，该环节不但能够强化学生的数学认知，帮助他们构建完整的知识框架，而且还能够使他们深度交流与反思，进而从中提炼出数学思想和模型构建方法，实现从“学会”到“会学”的转变，进而在未来的数学学习道路上走得更稳、更远。

一是，知识梳理，引导学生对所学的知识点进行梳理总结，其中包括全概率公式的深化应用、概率数列递推模型的构建方法、分布列与数学期望的综合求解等，在此基础上，教师进行完善和补充，以此来助力学生认知框架的构建。

二是，方法归纳，与学生一同总结本节课中所运用的数学方法，包括转化与化归、分类讨论、数学建模等等，加深学生对于相关方法的认知。

三是，思维生活，引导学生说一说数学知识点之间的关联性，强化他们概率知识与数列知识的融合与应用能力，在此基础上，鼓励他们在今后的学习道路上要注重知识的迁移和灵活运用。

四是，设问留疑，基于本节课教学内容，提出相应的课后思考问题，引导学生在课后进行思考分析，如可以将摸球模型中的球的个数进行调整，交换n次后相关概率该如何求解，如此一来，不但能巩固学生的学习效果，而且也能延续他们的数学学习和探究兴趣，助力其思维能力与核心素养培养，可谓是一举多得。

三、结语

复杂事件的概率计算是概率中的一个 / 重难点问题，特别是概率与试验次数有关时，可以利用全概率公式得到概率的递推关系，再结合数列的相关知识求解。利用全概率公式计算概率时，关键在于找到适当的完备事件组对样本空间进行分割。从本节课不难发现，找准完备事件组，把事件的概率看作一个数列，能有效地解决许多复杂的概率问题。在教学过程中，教师也应注重相关方法的科学运用，以此来提升教学质量，为学生数学知识的掌握与核心素养培养保驾护航。

参考文献

[1] 刘永超 . 条件概率与事件独立性的教学建议 [J]. 数学通讯 ,2025,(12):5-9.

[2] 孔小军 , 邢富根 . 基于单元整体观视角的高中概率概念教学——以 " 条件概率 " 为例 [J]. 中学数学 ,2025,(07):24-26.

[3] 琚运萍 . 条件概率的教学反思 [J]. 湖北教育 (政务宣传),2025,(03):88.

[4] 张春爽 , 韩红 . 基于 UbD 理论的高中数学教学设计——以 " 条件概率 " 为例 [J]. 中学数学研究 (华南师范大学版),2025,(02):18-21.

[5] 吴功尧 . 一题多解，一型四法：条件概率问题的破解方法 [J]. 中学数学 ,2025,(01):119-120.

[6] 陈杰 , 汪雄 . 基于 " 教、学、评 " 一体化的单元作业设计与思考——以 " 条件概率与全概率公式 " 为例 [J]. 中学数学教学参考 ,2024,(30):63-66.

[7] 曾雪萍 . " 三新 " 背景下高中数学单元教学设计研究与实践——以 " 条件概率 " 为例 [J]. 新课程导学 ,2024,(22):34-37.

[8] 李永林 , 刘群 . 基于数学对象研究套路的教学活动设计探究——以 " 条件概率 " 为例 [J]. 教学月刊・中学版 (教学参考),2024,(Z2):53-58.

[9] 刘金平 . 条件概率问题的破解 " 四法 "[J]. 数理天地 (高中版),2024,(09):4-5.

[10] 郑燕 . 高中数学条件概率教学现状分析及教学策略研究 [D]. 西华师范大学 ,2024.

