

函数复习教学注重学生直观能力的培养 ——以函数对称性复习为例

余星

中山市杨仙逸中学, 广东 中山 528400

DOI: 10.61369/SDME.2025320014

摘 要 : 函数的对称性一直是高考热门考点, 每年都有相应考题出现, 因此研究该专题下的复习课教学很有必要。本文精准围绕“函数的对称性”这一主题, 从其基本概念、原理、思路出发, 整合知识结构, 完善知识体系, 渗透知识背景, 提升数学思维本教学设计旨在帮助学生系统掌握函数对称性的基本概念、判别方法及应用技巧。

关 键 词 : 函数; 对称性; 直观素养

The Teaching of Function Review Emphasizes The Cultivation of Students' Intuitive Abilities—Taking The Review of Function Symmetry as an Example

Yu Xing

Yang Xianyi Middle School, Zhongshan, Guangdong 528400

Abstract : The symmetry of functions has consistently been a popular topic in the college entrance examination, with corresponding questions appearing every year. Therefore, it is necessary to study the teaching of review lessons under this topic. This paper precisely focuses on the theme of "function symmetry," starting from its basic concepts, principles, and ideas, integrating the knowledge structure, improving the knowledge system, infiltrating the knowledge background, and enhancing mathematical thinking. This teaching design aims to help students systematically master the basic concepts, discrimination methods, and application skills of function symmetry.

Keywords : function; symmetry; intuitive literacy

《普通高中课程标准（2017版）》中明确指出学科素养是育人价值的集中体现, 是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必备品格和关键能力。其中直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态和变化, 利用空间形式尤其是图形, 理解和解决数学问题的素养, 本文以函数对称性教学为例, 谈谈在高考复习中如何培养学生的直观素养, 突破对抽象概念的理解困难。

一、地位与作用

（一）课程分析

函数是贯穿整个高中数学的核心概念之一, 函数对称性作为函数性质的重要组成部分, 在解决函数图像、性质及应用问题时具有关键作用。

（二）学情分析

本节课的教学对象是高中三年级学生, 他们已经掌握了函数的基本概念和性质, 具备一定的数形结合能力。但在面对复杂的函数对称性问题时, 往往难以准确把握对称的本质特征和判别方法, 不能数形转换。因此, 需要通过系统的教学设计, 帮助学生

建立完整的知识体系。

二、教学目标

知识与技能目标: 使学生理解函数轴对称和中心对称的定义, 掌握判断函数对称性的代数方法和几何方法, 能够运用对称性解决函数图像绘制、性质分析等实际问题。

过程与方法目标: 通过实例分析、探究讨论等方式, 培养学生观察、归纳、推理的能力, 提升数形结合的数学思维水平。

情感态度与价值观目标: 让学生在探索函数对称性的过程中感受数学的对称美, 培养严谨求实的科学态度。

三、教学重点与难点

教学重点：函数轴对称和中心对称的代数特征及其判别方法。

教学难点：抽象函数的对称性判断及对称性的综合应用。

四、教学过程设计

(一) 回顾旧学 夯实基础

问题1：现实中有很多图像是对称，高考中也经常遇到对称性的问题，高中阶段遇到的函数主要分为直线对称与点对称问题。你能阐述一下函数对称的定义吗？师生回忆活动，教师板书

1. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(a-x)$ ，则图象关于直线 $x=a$ 对称，反之亦成立。

问题2：你能解释一下这个等式为啥能说明该函数能关于直线对称吗？能不能从形的角度说明？

师生活动：教师总结实际上等式的意义是括号里两个自变量取值关于 $x=a$ 对称，函数值相等，即函数关于 $x=a$ 对称，并画出图形。

问题3：还有其他的代数形式能说明函数关于图象关于直线 $x=a$ 对称？

师生活动：老师板书举例，学生判断

$$f(x+2a)=f(-x), f(x)=f(2a-x),$$

$$f(2x)=f(2a-2x), f(3x)=f(2a-3x).....$$

问题4：同理你能阐述一下函数点对称的定义吗？并加以解释该等式如何能说明函数关于点对称。

师生回忆活动，教师板书：若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(2a-x)=2b$ ，则图象关于点 (a,b) 对称，反之亦成立。

问题5：你能解释一下这个等式如何能说明该函数能关于 (a,b) 对称吗？能不能从形的角度说明？

师生活动：教师总结实际上等式的意义上只要括号里两个自变量取值关于 $x=a$ 对称，函数值相等函数值关于 $y=b$ 对称，即函数关于点 (a,b) 对称。并画出图形。

问题6：还有其他的代数形式能说明函数关于图象关于直线 $x=a$ 对称？

师生活动：老师板书举例，学生判断

$$f(x+2a)+f(-x)=2b, f(x)+f(2a-x)=2b,$$

$$f(2x)+f(2a-2x)=2b, f(3x)+f(2a-3x)=2b.....$$

设计意图：让学生回忆，抓住数学的本质，而不是死记硬背去记公式，并且给出一些常见的函数对称性的等式，深化对对称性定义的理解。

(二) 细研考点 突破难点

例1. 已知函数 $f(x), x \in \mathbf{R}$ 满足 $f(x)=f(2-x)$ ，若函数 $y=f(x)$ ， $y=|x^2-2x-3|$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，则

$$\sum_{i=1}^n x_i = ()$$

A. 0 B. m C. $2m$ D. $4m$

师生活动：从函数的表达式你能得出两个函数有什么特点吗，能不能画出大概草图，画出草图后由图形能不能得出交点的

横坐标的特点，并且列出相应的关系式？因为为 $y=f(x), y=|x^2-2x-3|$ 的图像都关于 $x=1$ 对称，所以它们图像的交点也关于 $x=1$ 对称，当 m 为偶数时，其和为 $2 \times \frac{m}{2} = m$ ；当 m 为奇数时，其和为 $2 \times \frac{m-1}{2} + 1 = m$ ，因此选 B.

变式. 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$ ，若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ ，则

$$\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = ()$$

A. 0 B. m C. $2m$ D. $4m$

师生活动：由 $f(-x)=2-f(x)$ 得 $f(x)$ 关于 $(0, 1)$ 对称，

而 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ 也关于 $(0, 1)$ 对称， $f(x_1)+f(2-x_1)=0$ ，画出草图

$\therefore$ 对于每一组对称点 $x_i + x_i' = 0, y_i + y_i' = 2$ ，

$$\therefore \sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m y_i = 0 + 2 \cdot \frac{m}{2} = m, \text{ 故选 B.}$$

设计意图：通过具体的函数实例与抽象函数的结合，学会观察出抽象函数与具体函数的对称轴或对称中心，体会理解函数对称的第一个性质；此类问题往往需要观察出函数的对称轴或者对称中心，然后利用对称的性质求解即可。

例2. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x+2)$ ，在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，若 $x_1 < 1 < x_2$ 且 $x_1 + x_2 > 2$ ，则 $f(x_1) + f(x_2)$ 的值 ()

A. 可正可负 B. 恒为正
C. 恒为负 D. 等于0

师生活动： $f(-x)=-f(x+2)$ 表示什么意思， $x_1 < 1 < x_2$ 表示说明意思， $x_1 + x_2 > 2$ 又表示什么意思？能不能画出大概草图。最后规范写出代数解法？

$f(-x)=-f(x+2)$ 表示函数 $y=f(x)$ 图象关于 $(1, 0)$ 对称，因为 $x_1 + x_2 > 2$ ，即 $x_2 - 1 > 1 - x_1$ ，表示 x_2 到1的距离大于1到 x_1 的距离，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，

画出草图知道 $f(x_1) + f(x_2) > 0$ 。

代数书写： $f(x_1) + f(2-x_1) = 0$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，知道由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

由 $x_1 + x_2 > 2$ ，知道 $x_2 > 2 - x_1$ ，

$$f(x_2) < f(2-x_1)$$

$$\text{所以 } 0 = f(x_1) + f(2-x_1) > f(x_1) + f(x_2)。$$

故选：B.

设计意图：引导学生由于数到形的转化，再由形到数的书写。

变式. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称，在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，若 $x_1 < 1 < x_2$ 且 $x_1 + x_2 > 2$ ，则 ()

A. $f(x_1) > f(x_2)$ B. $f(x_2) > f(2-x_1)$
C. $f(x_1) > f(2-x_2)$ D. $f(x_2) < f(2-x_1)$

师生活动：因为 $x_1 + x_2 > 2$ ，所以 $x_2 > 2 - x_1$ ，

因为 $x_1 < 1 < x_2$ ，所以 $1 < 2 - x_1 < x_2$ ，

又函数 $y = f(x)$ 图象关于直线 $x = 1$ 对称，在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，画出图像

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x_2) > f(2 - x_1)$ 。

故选：B。

问题7：能不能找一个既关于直线又关于点对称的函数，该函数有什么性质，并且能不能推广到一般的结论，并且加以证明，若一个连续函数 $f(x)$ ，若其图象关于直线 $x = a$ 对称，且关于点 $(m, f(m))$ 对称？

师生活动：师生举例 $y = \sin x$ 函数图像知道，其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，且关于点 $(0, 0)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数，且 $T = 4 \left| \frac{\pi}{2} - 0 \right| = 2\pi$ 为 $y = \sin x$ 一个周期，由此我们可以得到一般的性质：若函数 $f(x)$ 连续，若其图象关于直线 $x = a$ 对称，且关于点 $(m, f(m))$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数，且 $T = 4|a - m|$ 为 $f(x)$ 一个周期。

证明：由于 $f(x) = f(2a - x)$ 与 $f(x) = f(2m - x) = 2n$

消去 $f(x)$ 得到 $f(2a - x) + f(2m - x) = 2n$ 。

即 $f(2a + x) + f(2m + x) = 2n$ 即 $f(x) + f(x - 2a + 2m) = 2n$

当 x 取 $x - 2a + 2m$ 即 $f(x - 2a + 2m) + f(x - 4a + 4m) = 2n$

即 $f(x) = f(x - 4a + 4m)$

所以 $T = 4|m - a|$ 为 $f(x)$ 的一个周期。

设计意图：通过类比归纳证明，从特殊到一般，得出一般结论，有助于帮助学生形成良好的数学思维。

例5. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称，且对任意 $x \in R$ ，都有 $f(4 - 2x) = f(2x)$ ，则（ ）

- A. $f(0) = 1$ B. $f(x + 2) = f(x)$
C. 函数 $f(x)$ 为奇函数 D. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2025) = 0$

师生活动：由 $f(4 - 2x) = f(2x)$ 可得 $f(4 - x) = f(x)$ ，知 $f(x)$ 对称轴为 $x = 2$ ，由于对称中心为 $(1, 0)$ ，知道4为函数 $f(x)$ 的一个周期，然后在黑板上做出草图分析

知 $f(0) = 1$ 没有依据， $f(x + 2) = f(x)$ 也不一定对除非则 $f(x) = 0$ ，对于C，由 $f(4 - x) = f(x)$ 可得 $f(-x) = f(4 + x) = f(x)$ ，故 $f(x)$ 为偶函数，

对于D，由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称可知 $f(x) + f(2 - x) = 0$ ，

令 $x = 1$ 得 $2f(1) = 0$ ，即 $f(1) = 0$ ， $f(0) + f(2) = 0$ ， $f(3) = f(1) = 0$

且4为函数 $f(x)$ 的一个周期，故

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2025) = f(1) = 0$ ，故D正确。

故选：D。

链接高考

已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 R ，且 $f(x) + g(2 - x) = 5$ ， $g(x) - f(x - 4) = 7$ 。若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称， $g(2) = 4$ ，则 $\sum_{k=1}^{22} f(x) =$ 。

- A. -21 B. -22 C. -23 D. -24

师生活动：利用方程组的消元思想得到 $g(x)$ 的对称性与周期

性，然后求出 $g(x)$ 一个周期内的取值，再由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系得出 $f(x)$ 的周期与一个周期内的取值即可解答：

由 $f(x) + g(2 - x) = 5$ ，即 $f(x - 4) + g(6 - x) = 5(1)$

与 $g(x) - f(x - 4) = 7$ 得到 $g(x) + g(4 - x) = 12$ ，

即 $g(x)$ 对称中心为 $(3, 6)$ 。

由于 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称，所以

$g(x)$ 一个周期 $T = 4|3 - 2| = 4$ ，所

以 $g(5) = g(1), g(5) + g(1) = 12$ ，得到 $g(5) = g(1) = 6$ 。

以 $g(2) = 4, g(2) + g(4) = 12$ ，得到 $g(4) = 8$ 。

$g(x) - f(x - 4) = 7$ 得到 $f(x) = g(x + 4) - 7 = g(x) - 7$

所以 $f(x)$ 周期也为4，下面计算 $f(x)$ 一个周期内函数值，

$f(1) = g(1) - 7 = -1$ ，

$f(2) = g(2) - 7 = -3$ ，

$f(3) = g(3) - 7 = -1$ ，

$f(4) = g(4) - 7 = 1$ ，

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(x) = 5(f(1) + f(2) + f(3) + f(4)) + f(1) + f(2) = -22$ 。

设计意图：我们一般先求对称性，再求周期性，最后在一个周期内求值作答。

(三) 教学反思

在函数对称性的教学中，我从学生的认知规律出发，通过直观图像与代数表达式的结合帮助学生理解对称性概念。例如，利用函数图像的对称轴或对称中心，引导学生观察点的对应关系，再从代数角度推导对称点的坐标规律。这一过程中，我发现部分学生对抽象符号的理解存在困难，尤其是点对称与轴对称判断时容易混淆代数条件。为此，我增加了具体函数的实例分析，通过对比图像与解析式强化学生的感性认识。此外，我还设计了小组讨论环节，让学生自主归纳对称性的共性与差异，促进知识内化。反思教学效果，学生在图像对称性的识别上进步明显，但代数推理能力仍有待加强。今后需进一步优化教学设计，例如引入动态几何软件辅助演示，帮助学生在直观与抽象之间建立更稳固的桥梁，同时加强代数变形训练，提升逻辑表达能力。

参考文献

- [1] 郑毓信. "数学深度教学"的理论与实践 [J]. 数学教育学报, 2019, 28(05): 24-32页
- [2] 史宁中. 高中数学课程标准修订中的关键问题 [J]. 数学教育学报, 2018, 27(01): 8-10页
- [3] 蒋智东. 从提高学生运算能力的角度谈数学核心素养的培养——以高三复习为例 [J]. 中学数学: 高中版, 2016(11): 3. DOI: 10.3969/j.issn.1002-7572.2016.21.006.
- [4] 张先龙, 肖凌慧. 基于数学核心素养的教学设计——以函数的单调性新授课为例 [J]. 中学数学教学参考旬刊, 2017.
- [5] 沈良. 统领与驱动: 单元复习教学的路径创新——以"一元函数的导数及其应用"单元复习为例 [J]. 中学教研(数学版), 2024(11): 8-11.
- [6] 孙剑. 关注"四能"的章节复习课教学设计初探——《"一次函数"小结与思考》教学设计的对比分析 [J]. 数学之友, 2015(4): 86-87.
- [7] 高凯亮, 胡歧曦. 手绘函数草图教学实践与启示——以"反比例函数"复习课为例 [J]. 2025(3): 32-36.
- [8] 杨祉妍. 问题驱动式教学法, 培养数学核心素养——以"三角函数的诱导公式"为例 [J]. Advances in Education, 2024, 14. DOI: 10.12677/ae.2024.1491692.
- [9] 李秀萍, 孙亦器. 论函数教学中学生直观想象素养的培育 [J]. 上海中学数学, 2017(12): 2.
- [10] 丁银杰. 基于图形图像直观 发展代数推理能力——以"一次函数的图像与性质"复习课为例 [J]. 中学数学教学参考, 2025(17): 25-28.