

GARCH 型过程稳健控制设计及其在金融市场监控中的应用

王志坚, 麦智

广东财经大学统计与数据科学学院, 广东 广州 510320

DOI:10.61369/ASDS.2026040010

摘要 : 传统 GARCH 型质量控制图的中心限与控制上下限对离群值敏感, 常会导致监测结果与实际不符。本研究采用 HL-Shamos 稳健组合估计量与 Huber 权函数对其进行稳健改进, 构建出稳健 GARCH 型控制图。数值模拟结果发现: 第一, 在不同样本量、不同污染率下, 稳健 GARCH 型控制图与删除离群值的传统控制图监测效果接近, 而与含离群值的传统控制图相差较大。第二, 随着污染率增加, 传统控制图异方差控制限间距逐渐增大, 而稳健控制图几乎不变或变化轻微。第三, 在大样本、高污染率下, 传统控制图异方差控制限近似成直线型且远离控制中心限, 而稳健控制图却改变不大, 表现出较强的抗差性和稳健性。实证分析结果进一步验证了稳健 GARCH 型控制图的可行性和有效性。研究结论可用于离群值与异方差并存的时间序列稳健建模及统计过程控制。

关键词 : GARCH 型控制图; HL-Shamos 组合估计量; Huber 权函数; 稳健估计

Robust Control Design for GARCH-Type Processes and Its Application in Financial Market Monitoring

Wang Zhijian, Mai Zhi

School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance & Economics, Guangzhou, Guangdong 510320

Abstract : The central limit and control upper & lower limits of the traditional GARCH quality control chart are sensitive to outliers, which often leads to the inconsistency between the monitoring results and the actual situation. In this study, the HL-Shamos robust combination estimator and Huber weight function are used to improve it robustly, and a robust GARCH control chart is constructed. The results of numerical simulation show that: first, under different sample sizes and different contamination rates, the monitoring effect of the robust GARCH control chart is close to that of the traditional control chart with outliers deleted, but is significantly different from that of the traditional control chart with outliers. Second, with the increase of contamination rate, the heteroscedasticity control limit interval of traditional control chart increases gradually, while the robust control chart is almost unchanged or changed slightly. Third, under large samples and high contamination rate, the heteroscedasticity control limit of traditional control chart is approximately linear and far from the control center limit, while the robust control chart has little change, showing strong robustness and robustness. The empirical analysis results further verify the feasibility and effectiveness of the robust GARCH control chart. The research findings can be applied to robust statistical process control for time series featuring concurrent outliers and heteroskedasticity.

Keywords : GARCH control chart; HL-Shamos combination estimator; Huber weight function; Robust estimation

引言

统计过程控制 (简称 SPC) 是应用统计技术对过程中的各个阶段进行评估和监测, 建立并保持过程处于可接受且稳定的水平, 从而保证产品与服务符合规定要求的一种质量管理技术。常规控制图应用的基本假定是观察数据独立同分布 (iid), 但在大数据时代背景下, 时间序列数据常出现复杂情况, 如非正态性、离群值、自相关性和异方差性并存等特征, 导致常规控制图有时不能很好发挥作用, 因此有必要进一步研究。

基金项目: 本文获得广东省基础与应用基础研究基金项目“多变量自相关过程稳健控制设计及评价方法研究”(项目编号: 2026A1515011461)资助。

作者简介:

王志坚 (1982.12-), 男, 江西余干人, 博士, 广东财经大学副教授, 研究方向: 稳健统计、时间序列; 邮箱: 32680822@qq.com;

麦智 (2002.09-), 男, 广东佛山人, 广东财经大学硕士研究生, 研究方向: 稳健统计、时间序列; 邮箱: 1910287603@qq.com。

一、文献综述

对于序列仅出现自相关情形,目前学术界有两种研究路径:一是修正控制图,即针对受控过程的自相关性,对常规控制图控制限加以调整,其中包括改进的 EWMA 控制图和 ARMA 控制图等; Ajadi JO^[1] 设计出了稳健多变量 EWMA 分散控制图; Koyuncu, N^[2] 研究了稳健修正的 R 型控制图; Cabana Elisa 等^[3] 基于稳健重加权收缩估计量提出了稳健多变量控制图设计原理; Yadpirun 等^[4] 针对自相关过程提出了改进型指数加权移动平均控制图并给出了平均运行长度计算方法。二是转向残差控制图,因为当序列值拟合适当的时间序列模型后,其残差是独立的,可通过残差控制图达到对质量特性的监控目的,建立了关于残差 EWMA 和 CUSUM 控制图; 张立健等^[5] 构建了 AR-ARCH 型残差控制图; Sermad Abbas 等^[6] 构建了局部线性时间序列均值稳健残差控制图; Salah Mohamed 等^[7] 研究了伽马回归模型下残差控制图的剖面监测; Li Xue 等^[8]、Ramy M 等^[9] 分别提出了不同的残差控制图设计方法并将其应用于不同的领域监控。

当序列出现离群值(非正态性)与自相关混合情形时,多采用基于模型拟合残差控制图方法,但该方法严重依赖于模型的估计精度,当模型精度不够时,残差并非独立同分布导致监测失效。目前解决这类问题的思路主要是构建稳健时间序列模型,确保得到的残差无自相关性,符合残差控制图使用条件,从而构建稳健残差控制图。Liu 等^[10] 研究了在非正态分布下,用样本中位数来构建稳健 EWMA 控制图,该稳健控制图在检测均值漂移方面比传统控制图更优。Derya Karagöz^[11] 对非正态分布下的非对称控制图控制限进行稳健设计。Ishaq 等^[12] 对污染过程及违背基本假定的双控制图进行了稳健改进。Liang 等^[13] 将空间符号协方差矩阵和最大范数应用于指数加权移动平均方案,提出了一种多变量协方差二期控制图。Nasir Abbas^[14] 构建了稳健 S2 控制图。Kao Shih Chou^[15] 基于平方 A 估计量构建了稳健标准差控制图。Muhammad Arslan 等^[16] 基于稳健 L 协方差矩阵构建霍特林 T2 控制图,用于在存在异常值的情况下监测高维非正态多元数据。

当序列仅有异方差特征(波动簇聚性)情形时,通过文献梳理不难发现,此类问题的研究相对比较滞后。主要有: Severin^[17]、Sehipper^[18]、夏远强^[19] 先后提出应用受控过程条件标准差取代无条件标准差来构造控制图控制限方法,后面许多学者均是采用该方法。Sabahno Hamed^[20] 用变参数控制图监测存在自相关的多变量变异系数。当出现离群值(非正态性)、自相关与异方差三种混合情形时,目前国内外对这方面的研究进展不大。主要有:王志坚^[21] 通过构建稳健 ARMA 模型和 GARCH 模型得到了稳健残差控制图。庄芳等^[22] 采用绝对偏差中位数对 EWMA 方差控制图进行稳健设计,效果良好。苏拥英,王志坚^[23] 研究了常规过程控制图的敏感性分析及稳健设计。Salih O 等^[24] 对因素选择控制图的最优稳健设计进行了研究。Atef F. Hashem 等^[25] 研究了一种新的基于变异系数的距离加权控制图,用于监测核事件数据。

本研究在前人研究基础上,首先对 GARCH 型质量控制图进

行了敏感性分析,包括:第一, GARCH 型一般控制图,即无自相关性但有异方差性的控制图;第二, GARCH 型残差控制图,即既存在自相关性又存在异方差性的控制图。其次,结合 HL-Shamos 稳健组合估计量与 Huber 权函数对 GARCH 型控制图控制中心、异方差控制限进行稳健改进,构建了稳健 GARCH 型控制图,并通过模拟与实证分析检验稳健 GARCH 型控制图的可行性与有效性,从而较好的解决了在离群值(非正态性)、自相关与异方差三种情形并存时的传统过程控制失效问题。研究结论可为大数据时代的过程控制方法提供新思路。

二、传统 GARCH 型控制图的敏感性分析及相关稳健估计量

(一) 无自相关有异方差情形

假设 $\{y_t\}$ 为无自相关的异方差序列,其表达式如下:

$$y_t = m + \varepsilon_t \quad (1)$$

其中, m 为序列均值; ε_t 为相互独立的随机扰动项。(1) 式残差可表示为:

$$\varepsilon_t = y_t - m$$

由前文假设可知,序列 $\{y_t\}$ 无自相关性,故残差序列 $\{\varepsilon_t\}$ 相互独立; $\{y_t\}$ 具有异方差性,故残差 $\{\varepsilon_t\}$ 存在 GARCH 效应。因此,基于过程 $\{y_t\}$ 的控制图,其控制限可以表示为:

$$\begin{cases} \text{控制上限} & \text{UCL} = m + 3\sigma_t \\ \text{中心限} & \text{CL} = m \\ \text{控制下限} & \text{LCL} = m - 3\sigma_t \end{cases} \quad (2)$$

显然, m 与时间无关, σ_t 与时间有关,因此由(2)式确定的控制中心为恒定,但控制限是随时间而变化的异方差控制限,故得到 GARCH 型一般控制图。显然 m 与 σ_t 均对离群值敏感^[21],故 GARCH 型一般控制图具有不稳健性。

(二) 自相关与异方差并存情形

假设 $\{y_t\}$ 为自相关与异方差并存的序列,其表达式如下:

$$y_t = m_t + \varepsilon_t = E[y_t | F_{t-1}]$$

其中, m_t 为在给定前期信息集 F_{t-1} 条件下 y_t 的条件均值; ε_t 为相互独立的随机扰动项。由定义可知, $\{y_t\}$ 具有异方差性,故残差 $\{\varepsilon_t\}$ 有 GARCH 效应。则下式成立:

$$y_t \in (\hat{m}_t - 3\sigma_t, \hat{m}_t + 3\sigma_t)$$

因此,基于过程 $\{y_t\}$ 的控制图,其控制限可以表示为:

$$\begin{cases} \text{控制上限} & \text{UCL} = \hat{m}_t + 3\sigma_t \\ \text{中心限} & \text{CL} = \hat{m}_t \\ \text{控制下限} & \text{LCL} = \hat{m}_t - 3\sigma_t \end{cases} \quad (3)$$

显然, $\hat{m}_t$ 和 σ_t 与时间有关,因此由(3)式确定的三条控制限均不再恒定,而是随时间变化而变化,控制限的不恒定性会导致对异常点界定带来困难。在此,将(3)式变形如下:

$$y_t - \hat{m}_t = \varepsilon_t \in (-3\sigma_t, 3\sigma_t)$$

可知在 t 时刻, 残差 ε_t 落在 $(-3\sigma_t, 3\sigma_t)$ 内的概率也是99.73%。故对原序列监测与对残差的监测效果一致。故可采用对残差序列的监测去替代对原序列监控, 即为残差控制图, 其控制限表达式为:

$$\begin{cases} \text{控制上限} & \text{UCL} = 3\sigma_t \\ \text{中心限} & \text{CL} = 0 \\ \text{控制下限} & \text{LCL} = -3\sigma_t \end{cases}$$

由残差控制图控制限表达式可知, 中心限是恒定, 只有控制上、下限是波动, 显然这比之前的三条控制限均是波动要改善很多。针对控制上、下限具有波动性特点, 可以采用 GARCH 模型去刻画之, 得到 GARCH 型残差控制图。GARCH 型残差控制图需要先建立序列 ARMA 模型, 再求出异方差控制限。而 GARCH 型一般控制图只需求出序列均值, 再求出异方差控制限, 显然 GARCH 型残差控制图比 GARCH 型一般控制图更为复杂, 由于两者构建异方差控制限的思路一致, 因此下文主要围绕 GARCH 型残差控制图展开。

在受控过程无离群值时, 用异方差构造的控制限显然比同方差构造控制限更科学, 且能更好地捕捉到受控过程的异常现象。但随着 SPC 技术在质量管理和经济金融等领域的广泛使用, 诸如疫情的发生、金融危机、观测仪器的偶然故障、人为的观测差错等均会导致序列中异常情况发生。但由于 GARCH 型控制图异方差控制限 $(-3\sigma_t, 3\sigma_t)$ 对离群值敏感, 缺乏稳健性, 易导致上、下控制限间距扩大, 引起“漏报警”现象, 从而出现了在对异常现象监控过程中反而被异常点所干扰的困境。鉴于此, 本研究采用 σ_t 的稳健估计技术来解决该问题, 即用稳健标准差代替无条件标准差来构造控制限, 从而设计出稳健的 GARCH 型质量控制图。

(三) 相关稳健估计量

最小二乘法的基本原理是残差平方和函数最小, 但该函数不稳健, 单个的离群值能将其变得很大; 而最小一乘估计如 $\rho(x) = |x|$, 虽能减弱异常值对参数估计的影响, 但因其不可导而使其应用受限。对此, Huber (1964) 给出了一般意义上的 ρ 函数, 即对于如下样本回归模型:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + e_i = X_i' \beta + e_i$$

这时目标函数是

$$\sum \rho(e_i) = \sum \rho(Y_i - X_i' \beta) \quad (4)$$

β 的 M 估计是极小化 (4) 式。对 (4) 式关于参数 β 求偏导数, 并令其等于零, 则得到如下方程:

$$\sum \psi(Y_i - X_i' \beta) X_i' = 0 \quad (5)$$

其中 $\psi(\cdot)$ 为 $\rho(\cdot)$ 导函数, 为保证所估参数与因变量观测单位无关, 需下式成立:

$$\hat{\beta}(X_i, aY_i) = a\hat{\beta}(X_i, Y_i)$$

上式表示 M 估计满足尺度同变性, α 为任意常数。经尺度同

变换后 (5) 变为:

$$\sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{Y_i - X_i' \beta}{s}\right) X_i' = \sum_{i=1}^n \frac{\psi(e_i / s)}{e_i / s} X_i' \cdot e_i / s = 0 \quad (6)$$

记 $\omega_i = \frac{\psi(e_i / s)}{e_i / s}$ 为回归估计方程的权重, 即方程 (6) 可以写成

$$\sum \omega_i X_i' e_i = 0$$

显然上式即变成了一个加权最小二乘估计问题, 而且权重与回归系数通过残差来相互依赖; 适当选择目标函数 ρ 与权重函数 $\omega(e)$, 使残差大的异常点权重变小, 从而减弱离群值对参数估计的影响。M 估计法的函数很多, 本研究选择 Huber 权函数, 其表达式如下:

$$\omega(\varepsilon_i) = \begin{cases} 1 & |\varepsilon_i| \leq k \cdot \sigma \\ k \cdot \sigma / |\varepsilon_i| & |\varepsilon_i| > k \cdot \sigma \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式中常数 k 称为阈值 (也叫细调参数), 在实际中, k 值的选择要依赖于对样本中有多大比例离群值的先验信息基础上, 经试验比较, 本研究取 k=2.2。 σ 为序列的标准差, ε_i 为残差。

本研究借鉴 Hodges & Lehmann (1963) 提出的均值稳健估计量, 表达式为:

$$\text{median}\left(\frac{X_i + X_j}{2}\right) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

而后, Chanseok Park 等 (2022) [26] 将其推广为如下三种形式, 分别简称为 HL1、HL2 及 HL3:

$$HL1 = \text{median}_{i < j} \left(\frac{X_i + X_j}{2} \right),$$

$$HL2 = \text{median}_{i \leq j} \left(\frac{X_i + X_j}{2} \right),$$

$$HL3 = \text{median}_{\forall (i, j)} \left(\frac{X_i + X_j}{2} \right)$$

在此, 经比较后本研究选 HL3。

而标准差 σ 的稳健估计量选取 Shamos 估计量的无偏估计, 表达式为:

$$\text{Shamos} = \frac{\text{median}_{i < j} (|X_i - X_j|)}{\sqrt{2} \Phi^{-1}(3/4)} \approx 1.048358 \cdot \text{median}_{i < j} (|X_i - X_j|)$$

由于 Huber 权函数中的标准差 σ 对离群值敏感, 在此, 我们将 Huber 权函数进行稳健改进, 得到改进的 Huber 权函数, 本研究将其记为:

$$\omega^R(\varepsilon_i) = \begin{cases} 1 & |\varepsilon_i| \leq k \cdot \text{Shamos} \\ k \cdot \text{Shamos} / |\varepsilon_i| & |\varepsilon_i| > k \cdot \text{Shamos} \end{cases} \quad (8)$$

(8) 式即为 (7) 式的稳健版本, 因此, 对于构建 GARCH 型一般控制图, 采用 HL3 作为控制中心 (均值) m 的稳健估计量, 用原序列减去稳健均值得到残差, 再通过残差结合改进的 Huber 权函数算出原序列权重, 最后将该权重乘原序列后计算出稳健异方差波动率。

对于 GARCH 型残差控制图, 先建立稳健 ARMA 模型并通过模型算出残差, 确保残差服从独立同分布, 再通过残差结合改进的 Huber 权函数算出原序列权重, 最后将该权重乘以原序列后计算出稳健异方差波动率, 进而构建稳健控制限。稳健 GARCH 型控制图设计原理如图 1 所示。

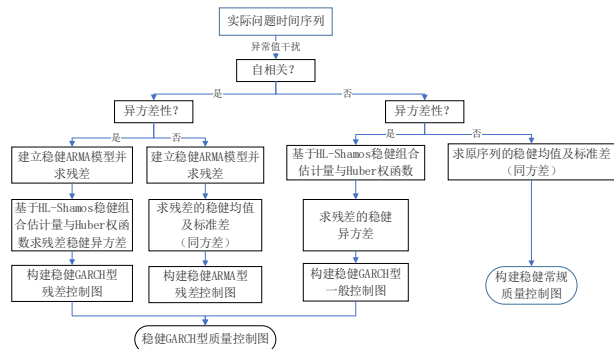


图 1: GARCH 型过程稳健设计原理

三、模拟研究

为验证本研究提出的稳健 GARCH 型控制图可行性与有效性, 在此模拟一组 GARCH (0,2) 系列, 其中 $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.9$ 。选取样本量分别为: 50、100、200、500, 污染率分别为 1%、5%、10%。目的是从小样本、大样本, 低污染率、高污染率全方位考察稳健效果。需要说明的是, 根据研究需要, 样本量为 500 时, 只考虑污染率为 10% 情形, 采用污染分布产生离群值, 表达式如下:

$$P = (1 - \varepsilon)N(\mu_0, \sigma^2) + \varepsilon U(\mu, \sigma^2)$$

其中 ε 表示污染率。污染数据来自于均匀分布, 通过随机抽取。

在此, 定义污染前的波动率称为原始波动率, 被污染后的波动率称为含离群值波动率, 稳健改进后的含离群值波动率称为稳健波动率, 此处波动率图即为控制图的上限。不同样本量、不同污染率下的模拟结果如图 2- 图 5 所示。需要说明的是, 由于控制图关于控制中心对称, 在此, 模拟部分只给出控制图上限, 目的是便于比较稳健改进前后的效果。

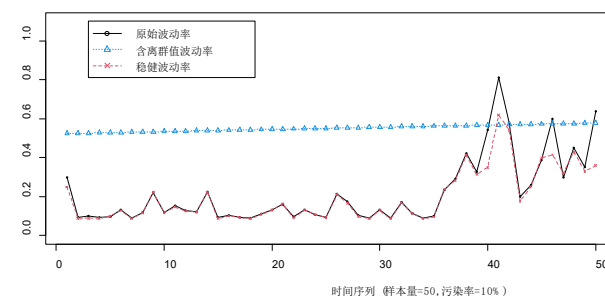
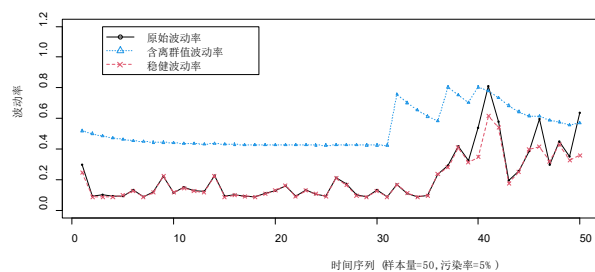
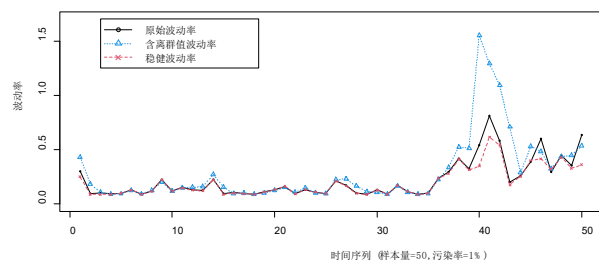


图 2: 样本量为 50, 污染率为 1%、5%、10% 的各波动率图

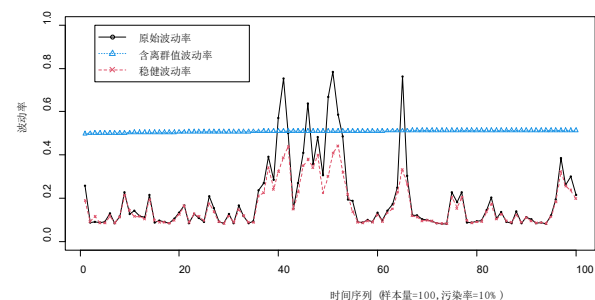
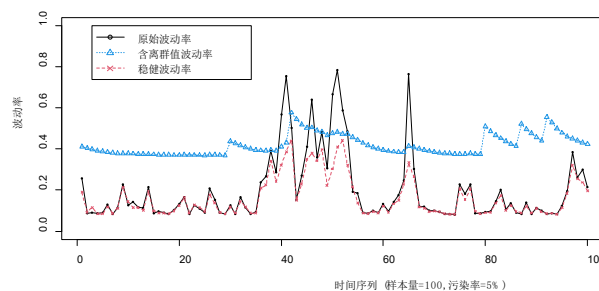
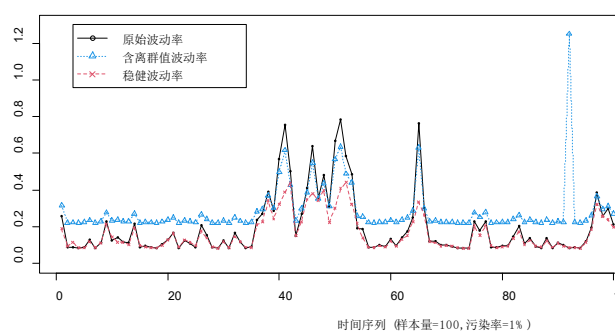


图 3: 样本量为 100, 污染率为 1%、5%、10% 的各波动率图

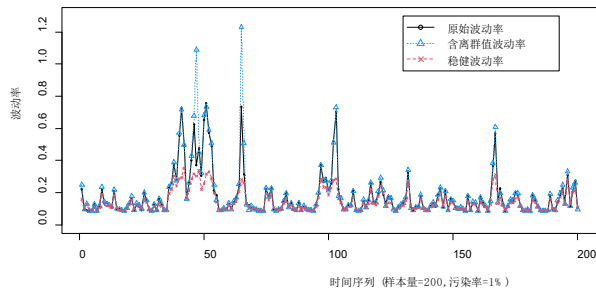


图4：样本量为200，污染率为1%、5%、10%的各波动率图

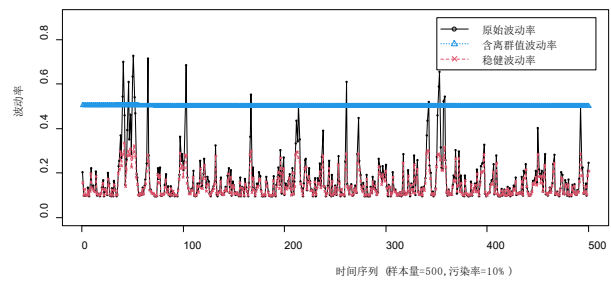


图5：样本量为500，污染率为10%的波动率图

从图2-图5的模拟结果可以得出以下三个结论：第一，在不同样本量、不同污染率下，原始波动率与稳健波动率差别不大，而与含离群值波动率相差较大。第二，随着污染率的增加，含离群值波动率偏离原始波动率越来越大，控制限间距被拉得越来越开，而稳健波动率几乎不变或变化轻微。第三，在大样本、高污染率下，原始波动率形状已近似成为一条直线且偏离控制中心较大，导致监控能力越来越差，甚至说已不再具备监控效果（在样本量为200、500，污染率为10%图中足已说明），而稳健波动率却改变不大，表现出较强的抗差性和稳健性。

四、实证分析

为了进一步检验稳健 GARCH 型控制图的可行性和有效性，下面以一个实际金融市场例子为例，选取脸书（Facebook）公司股票作为研究对象，研究期间为：2020年1月6日至2021年8月20日，共411个样本数据，数据来源于 yahoo 财经网站。股票前6天后6天各指标基本情况如表1所示。

表1：脸书公司股票2020-01-06至2021-08-20前6后6天情况

日期	开票价	最高价	最低价	收盘价	成交量	调整价
2020-01-06	206.70	212.78	206.52	212.60	17058900	212.60
2020-01-07	212.82	214.58	211.75	213.06	14912400	213.06
2020-01-08	213.00	216.24	212.61	215.22	13475000	215.22
2020-01-09	217.54	218.38	216.28	218.30	12642800	218.30
2020-01-10	219.20	219.88	217.42	218.06	12119400	218.06
2020-01-13	219.60	221.97	219.21	221.91	14463400	221.91
2021-08-13	362.97	364.66	361.48	363.18	7192500	363.18
2021-08-16	362.52	366.95	357.38	366.56	11222100	366.56
2021-08-17	362.98	364.67	355.07	358.45	12328700	358.45
2021-08-18	356.25	359.86	355.15	355.45	10042400	355.45
2021-08-19	351.35	357.57	351.00	355.12	12004500	355.12
2021-08-20	354.60	359.99	353.31	359.37	8693500	359.37

在各变量中选取收盘价的调整价，通过调整价算出脸书股票的对数收益率，计算公式如下：

$$r_t = \ln(P_t - P_{t-1}) * 100$$

其中， P_t 表示第t天的调整价， r_t 表示第t天的对数收益率，用R语言进行统计分析。首先对调整价及收益率做一个探索性数据分析图（如图6）及基本统计分析（如表2）来直观了解脸书公司股票调整价及收益率。

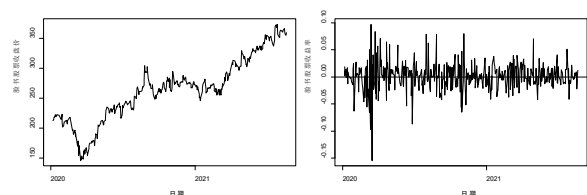


图6：脸书股票收盘价（左）及收益率（右）时序图

图6显示，收盘价在2020年上半年急速下降后一路上升，

中间虽偶有滑落现象，但不影响总体上涨趋势。而对于收益率来说，很明显可以看出有一些较为突出的点，至于这些点是否为统

计学上定义的离群点，需要通过统计检验来界定。

表2：脸书股票收益率基本统计量

最小值	最大值	均值	中位数	标准差	偏度	峰度
-0.154	0.0974	0.001321	0.00149	0.025461	-0.375313	4.688253

从收益率基本统计量看（表2），收益率没有呈现正态分布特征，而是呈现左偏分布，且有高峰厚尾的现象。进一步来观察脸书股票收益率的直方图及 Q-Q 图，如图7所示：

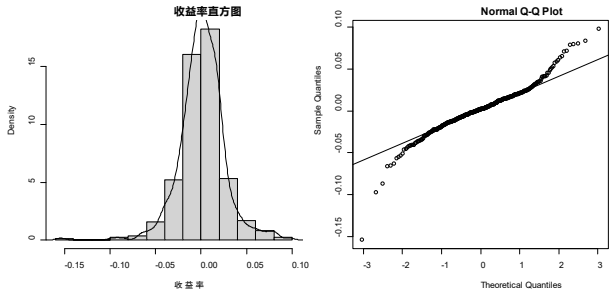


图7：脸书股票收益率直方图及 Q-Q 图

图7显示，收益率直方图及 Q-Q 图均已偏离正态分布。进行 Jarque Bera Test 正态性检验，得到检验统计量 X-squared = 392.18, p-value < 2.2e-16, 可知收益率不是正态分布，结合前面收益率时序图，我们初步判定：由于离群值的存在，导致收益率偏离正态分布。接下来建立 ARMA 模型，通过对收益率序列进

行平稳性检验，检验结果为平稳，再看收益率自相关和偏自相关图（如图8）：

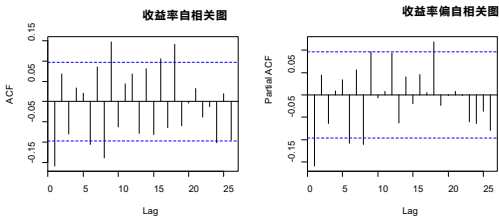


图8：脸书股票收益率自相关和偏自相关图

表3：ARMA 模型阶数的确定

	模型	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
ACF		拖尾	q 阶截尾	拖尾
PACF		P 阶截尾	拖尾	拖尾

结合图8再根据表3中 ARMA 模型的定阶准则，很难清晰地确定 ARMA 模型的阶数，因此需要比较2阶及以下各模型情况，如表4：

表4：ARMA 各模型显著性情况

模型	ARMA(1,0)	ARMA(0,1)	ARMA(1,1)	ARMA(1,2)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)
系数显著性	全显著	全显著	不全显著	全显著	全显著	全不显著
AIC	-1856.86	-1856	-1856.21	-1851.14	-1852.13	-1851.98

在保证系数显著的前提下，再比较模型的 AIC 值，AIC 值越小越好，最后选择 ARMA(1,0) 模型。建立 ARMA(1,0) 模型后再求出模型的残差，对残差序列进行 ARCH 效应检验，检验结果如表5所示：

表5：残差序列的 ARCH 效应检验结果

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
data: resid*2
Chi-squared = 49.451, df = 12, p-value = 1.744e-06

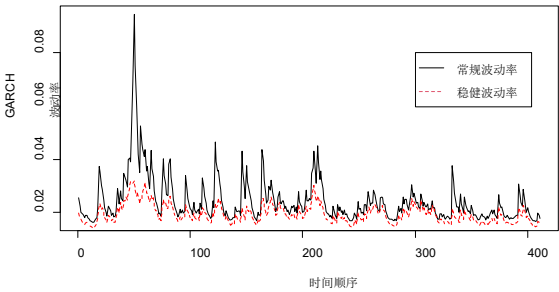


图9：脸书股票收益率序列的常规波动率与稳健波动率比较

表5显示：检验结果 p-value = 1.744e-06, 拒绝原假设，说明残差序列具有显著的 ARCH 效应，因此可以对收益率序列求出波动率，再建立 GARCH 型控制图。

图9为收益率序列的常规波动率与稳健波动率，图中显示，稳

健波动率比常规波动率波动幅度明显要小，说明稳健波动率受离群值影响较小。

结合常规 GARCH 型控制图（图10左）与稳健 GARCH 型控制图（图10右）对离群值监测效果来看，受离群值影响，常规控制图异方差控制限波动幅度参差不齐，而稳健控制图异方差控制限相对平稳。以序号48、49的点为例，该两点为离群点，但在常规控制图中由于离群点将异方差控制限间距拉大，导致该两个点在控制限内，使得原本为离群点而被误判为正常点，“掩盖现象”发生。

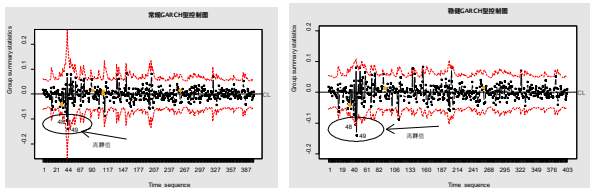


图10：常规 GARCH 型控制图（左）与稳健 GARCH 型控制图（右）

在此我们将文献^[27]提出的稳健时间序列离群值检测法检测结果作为参照，发现常规 GARCH 型控制图对离群值检测相对正确率为44.44%，而稳健 GARCH 型控制图对离群值检测相对正确率为77.78%，稳健 GARCH 型控制图监测正确率显著高于常规 GARCH 型控制图（表6）。

表6：离群值监测正确率比较											
	稳健时间序列离群值诊断法					常规 GARCH 型控制图					稳健 GARCH 型控制图
离群值序号	47	48	49	55	121	121	145	163	332	18	48 49 55 95 121 145 149 163 332
相对正确率	--					44.44%					77.78%

由于稳健 GARCH 型控制图采用了稳健控制限，进而消除或减弱了离群值对控制限的影响，从而较好的解决了在用 GARCH 型控制图对离群值监测过程中反而被离群值所干扰的困境。

五、结语

当受控过程出现离群值（非正态性）、自相关与异方差情形，

参考文献

[1]Ajadi JO, Zwetsloot IM, Tsui K-L. A New Robust Multivariate EWMA Dispersion Control Chart for Individual Observations[J]. Mathematics. 2021,9(9) :1–18.

[2]Koyuncu, N., Karagöz, D. Designing robust modified R control charts for asymmetric distributions under ranked set and median ranked set sampling[J]. Computational Statistics, 2021,36:1093 – 1121.

[3]Cabana Elisa ,Lillo Rosa E.. Robust multivariate control chart based on shrinkage for individual observations[J]. Journal of Quality Technology ,2022, 54(4):415–440.

[4]Yadpirun Supharakonsakun; Yupaporn Areepong; Korakoch Silpakob.Explicit ARL Computational for a Modified EWMA Control Chart in Autocorrelated Statistical Process Control Models [J] Computer Modeling in Engineering & Sciences.2025. 145(1): 699–720 .

[5]张力健，杨继平，张秋菊.AR-GARCH 型残差控制图及其应用研究 [J]. 中国管理科学 ,2006, 14(1):15–19.

[6]Sermad Abbas ； Roland Fried. Robust control charts for the mean of a locally linear time series[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation,2020,90(15):1–25.

[7]Salah Mohamed,Engy Mohamed,Shereen Abdel Latif. Profile monitoring of residuals control charts under gamma regression model[J]. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies,2022,6(4):23–31.

[8]Li Xue; Qiuyu Wang; Congkai Li; Lisheng An.Economic design of residuals MEWMA control chart with variable sampling intervals and sample size [J] Communications in Statistics – Simulation and Computation. 2025.54(2) : 467–488.

[9]Ramy M. Khalifa; Soumaya Yacout; Samuel Bassetto; Yasser Shaban.Condition monitoring and warning of a belt drive system based on a logical analysis of data regression-based residual control chart [J] Structural Health Monitoring. 2025. 24(3): 1657–1673.

[10]Lin Y C, Chao Y C, Chen C H. Robustness of the EWMA median control chart to non-normality[J]. International Journal of Industrial & Systems Engineering, 2017, 25(1):35–45.

[11]Derya Karagöz. Asymmetric control limits for range chart with simple robust estimator under the non-normal distributed process[J].Mathematical Sciences, 2018,12(4) :249–262.

[12]Ishaq Adeyanju Raji,Muhammad Riaz,Nasir Abbas. Robust dual-CUSUM control charts for contaminated processes[J]. Communications in Statistics–Simulation and Computation,2019,48(7):2177–2190.

[13]Liang, Xiang, Pu, Li, Jin. A robust multivariate sign control chart for detecting shifts in covariance matrix under the elliptical directions distributions[J]. Quality Technology & Quantitative Management,2019,16(1):113–127.

[14]Nasir Abbas. A robust S2 control chart with Tukey’ s and MAD outlier detectors[J].Quality and Reliability Engineering International,2020,36(1):403–413.

[15]Kao Shih Chou. A robust standard deviation control chart based on square A estimator[J]. Quality and Reliability Engineering International,2022,38(5):2715–2730.

[16]Muhammad Arslan; Usman Shahzad; Ali Yeganeh; Huiming Zhu; JC Malela Majika; Shakeel Ahmad.A Robust L - Comoments Covariance Matrix - Based Hotelling’ s T2s{T^{2}} Control Chart for Monitoring High - Dimensional Non - Normal Multivariate Data in the Presence of Outliers [J] Quality and Reliability Engineering International. 2025, 41(7): 3308–3317.

[17]Severin T., Schmid W.. Monitoring changes in GARCH models[J]. Allgemeines Statistisches Archiv, 1999,83 :281–307.

[18]Schipper S.,Schmid W.. Control charts for GARCH process[J]. Nonlinear Analysis,2001,47:2049–2060.

[19]夏远强，韩文秀，何民.GARCH 型相关过程及其质量控制图. 天津大学学报 [J]. 2003,36(0):92–95.

[20]Sabahno Hamed,Celano Giovanni. Monitoring the multivariate coefficient of variation in presence of autocorrelation with variable parameters control charts[J]. Quality Technology & Quantitative Management,2023,20(2):184–210.

[21]王志坚 . 稳健残差控制图的构建及在金融时序中的应用 [J]. 数理统计与管理 ,2017,36(05):930–942.

[22]庄芳，郁淼淼，吴纯杰 .带参数估计的 EWMA 方差控制图稳健性分析 [J]. 系统科学与数学 ,2018,38(01):101–118.

[23]苏拥英，王志坚 . 常规过程控制图的敏感性分析及稳健设计 [J]. 统计与决策 ,2021,37(10):160–164.

[24]Salih O. Duffuaa, Ahmed M. Ghaithan, Ahmed M. Attia. A mathematical model for the optimal robust design of cause selecting control charts[J]. European Journal of Industrial Engineering,2022,16(2):169–193.

[25]Atef F. Hashem; Najam ul Hassan; Maqbool Hussain Sial; Syed Muhammad Muslim Raza.A novel coefficient of variation based distance weighted control chart for the monitoring of nuclear event data [J] Journal of Radiation Research and Applied Sciences..2025,18(3) :101743–10174.

[26]Chanseok Park, Haewon Kim & Min Wang . Investigation of finite-sample properties of robust location and scale estimators[J].Communications in Statistics – Simulation and Computation, 2022,51(5):2619–2645.

[27]王志坚，王斌会 . 稳健改进的 AO 型异常点检测法在金融时序中的应用 [J]. 数理统计与管理 . 2016, 35(2):369–380.

研究者通常构建 GARCH 型一般控制图或 GARCH 型残差控制图对受控过程进行监测，而忽略了离群值本身对控制中心及异方差控制限的影响，结果往往导致监测效果不理想，对此类问题的解决即是本研究的创新之处。文章分析了 GARCH 型一般控制图及 GARCH 型残差控制图的敏感性，并基于 HL–Shamos 稳健组合估计量与 Huber 权函数方法对以上两类控制图的控制中心及控制限进行稳健改进，构建了稳健 GARCH 型控制图。研究进一步发现：在构建稳健 GARCH 型控制图时，将控制中心及控制限两者看成有机整体设计出的稳健组合估计量效果优于单独构建的稳健估计量。