

数学理论研究

欧建¹, 兰建新²

1. 四川轻化工大学机械工程学院, 四川 自贡 643000

2. 北京联合大学建材轻工学院, 北京 100192

DOI:10.61369/EST.2026010028

摘 要 : 本文共有五个部分, 第一部分创新性提出极限归纳法, 第二部分为黎曼猜想的研究, 第三部分为哥德巴赫猜想的研究, 第四部分为考拉兹猜想的研究。

关 键 词 : 数学归纳法; 极限; 黎曼 ζ 函数; 哥德巴赫猜想; 考拉兹猜想

Mathematical theoretical research

Ou Jian¹, Lan Jianxin²

1.School of Mechanical Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong, Sichuan 610000

2.College of Building Materials and Light Industry, Beijing Union University, Beijing 100192

Abstract : This article consists of five sections. The first section innovatively proposes the limit induction method. The second section focuses on the research of the Riemann Hypothesis. The third section is dedicated to the study of the Goldbach Conjecture. The fourth section is dedicated to the research of the Collatz Conjecture.

Keywords : Mathematical induction; Limit; Riemann zeta function; Goldbach conjecture; Collatz conjecture

引言

数学归纳法作为数学证明的重要方法, 其发展历程跨越了多个世纪^[1]。本文则是继承数学归纳法的思想, 拓展出了连续可导函数版的数学归纳法, 为归纳法创造了新的活力。后面的部分则是对于数学猜想的研究。

第一部分: 极限归纳法及其推广

数学归纳法: 假设 $f(n)=g(n) \cdots (1)$, 其中 $n=1,2,3,\dots$, 令 $n=a$, 其中 a 为整数, 得到 $f(a)=g(a)$, 令 $n=n+1$, 由 (1) 推导出 $f(n+1)=g(n+1)$, 那么就假设 (1) 成立。由于 $n=1,2,3,\dots$, 间距为 1, 基础值 $f(a)=g(a)$ 成立, 所以 $n=n+1$ 可以遍历所有取值, 所以说 $f(n)=g(n)$ 在整个取值范围内 ($n=a, a+1, \dots$) 恒成立。

极限归纳法: (按照前面离散的数学归纳法的思想), 假设连续可导函数 $f(x)=g(x) \cdots (2)$, 其中 $x \in [a, b]$, 当 $x=x_0$ 时, 其中 $x_0 \in [a, b]$, 有 $f(x_0)=g(x_0)$, 不妨令 $x=\lim_{h \rightarrow +\infty} x+\frac{1}{h}$, 如果能够由式 (2) 推导出 $\lim_{h \rightarrow +\infty} f(x+\frac{1}{h})=\lim_{h \rightarrow +\infty} g(x+\frac{1}{h})$, 则说明假设 (2) 成立。因为函数连续且找到了基础值 $f(x_0)=g(x_0)$, (因为 $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{h}$ 可以无限小, 所有可以表示为实数轴上点与点之间的最小间距), 且 $x=\lim_{h \rightarrow +\infty} x+\frac{1}{h}$ 可以遍历区间所有取值, 所以就有 $f(x)=g(x)$ 在整个定义域内 ($x \in [x_0, b]$) 是恒成立的。

极限归纳法推广: 已知 $f(x), g(x)$ 连续可导, 由柯西中值定理可

以知道 $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f(x+\frac{1}{h})-f(x)}{g(x+\frac{1}{h})-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ [2], 其中, 因为 $h \rightarrow +\infty$, 所以 $\xi=x$, 所以

就有 $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f(x+\frac{1}{h})-f(x)}{g(x+\frac{1}{h})-g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

假设连续可导函数 $f(x)=g(x) \cdots (3)$, 其中 $x \in [a, b]$, 当 $x=x_0$ 时, 其中 $x_0 \in [a, b]$, 有 $f(x_0)=g(x_0)$, 若由假设 (3) 推出

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f(x+\frac{1}{h})-f(x)}{g(x+\frac{1}{h})-g(x)} = 1$, 即可得出 $\lim_{h \rightarrow +\infty} f(x+\frac{1}{h}) = \lim_{h \rightarrow +\infty} g(x+\frac{1}{h})$, 继而说明

假设 (3) 成立, 即 $f(x)=g(x)$ 在 $x \in [x_0, b]$ 恒成立。

所以就有: 假设连续可导函数 $f(x)=g(x) \cdots (4)$, 其中 $x \in [a, b]$, 其中 $x_0 \in [a, b]$, 当 $x=x_0$ 时, 有 $f(x_0)=g(x_0)$, 若由 (4) 推出 $f'(x)=g'(x)$, 则说明假设 (4) 成立, 即 $f(x)=g(x)$ 在 $x \in [x_0, b]$ 恒成立。

假设连续可导函数 $f(x)=g(x) \cdots (5)$, 其中 $x \in [a, b]$, 令 $a \leq p < q \leq b$, 当 $x=p$ 时, 有 $f(p)=g(p)$, 当 $x=q$ 时, 有 $f(q)=g(q)$, 又由 (5) 推出 $f'(x)=g'(x)$, 所以 $f(x)=g(x)$ 在 $x \in [p, b]$ 和 $x \in [q, b]$ 恒成立, 即 $f(x)=g(x)$ 在 $x \in [p, q]$ 上恒成立。

极限归纳法的直接推论: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$, 其中 $x \in [0, b]$ 假设 $g(x)=xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n!}$, 其中 $x \in [a, b]$, 即有 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$,

于是就有 $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!}$ 。令 $x=0$ ，有 $g(0)=0$ ，等式成立；
 $g'(x) = f(x) + xf'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} + \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{n!}$ ，因为 $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n!})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (n+1) x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n x^{n-1}}{n!} + a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!} + a_n x^n$ ，所以就有 $g'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n!})'$ ，所以假设成立，即 $g(x) = xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n!}$ ，也即 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ ，其中 $x \in [0, b]$ 。不难发现其中 $a_n = f^{(n)}(0)$ ，所以就有 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!}$ ，其中 $x \in [0, b]$ 。

极限归纳法的应用

连续可导函数版的数学归纳法，即极限归纳法。为两函数在何定义域取值完全相等提供了一种快捷方法。传统的判断两函数在某定义域的值是否相等，方法为遍历定义域的每一个取值，然后逐个判断是否相等，直到遍历完定义域中所有取值才可以确定两函数在定义域内的值是否完全相等；而利用本文的方法，只需要计算定义域的最小值所对应的取值和最大值所对应的取值，然后计算两函数的导数是否相等，就可以确定两函数是否在该定义域内取值完全相等，大大简化了传统的方法。

第二部分：黎曼 ζ 函数的研究

在1859年11月,黎曼在柏林科学院的院报上发表了一篇10页长的关于 ζ 函数与素数的关系的论文^[3],黎曼在论文中对 ζ 函数的零点分布给出一个猜测^[4],这就是黎曼猜想(即所有的非平凡零点都位于实部为 $\frac{1}{2}$ 的临界点上)^[5]。

黎曼 ζ 函数的解析延拓公式推导。

不妨令 $\zeta(s) = g(s)\zeta(1-s)$, 因为 $\zeta(s)$ 解析延拓后有 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}^{[6]}$, 因为 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}^{[7][8]}$, 所以就有 $g(-1) = -2^{-1}\pi^{-2}$, 因为 $\zeta(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})\zeta(\frac{1}{2})$, 所以就有 $g(\frac{1}{2}) = 1$, 得 $g(s) = 2^{-s}\pi^{-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)$ 为一个解, 因为普通函数具有唯一性, 所以就有 $g(s) = 2^{-s}\pi^{-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)$ 为唯一解。

于是就有 $\zeta(s)$ 解析延拓后的公式为: $\zeta(s) = 2^{s-1} \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$ 。
令 $s = a + bi$, 其中 $0 < a < 1, b \neq 0$, 易知 $2^{a+bi} \pi^{a+bi-1} \neq 0$ 且 $\sin[\frac{\pi(a+bi)}{2}] \neq 0$,
因 $\Gamma(a+bi) \Gamma(1-a-bi) = \frac{\pi}{\sin(\pi a + \pi bi)} \neq 0$, 所以就有 $\Gamma(1-a-bi) \neq 0$ 。不妨令
 $w(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s)$, 所以就有 $w(a+bi) \neq 0$ 。

黎曼 ζ 函数的交错级数解析延拓公式研究。

原始 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ [9], 其中 $\text{Re}(s) > 1$ [10]. 因为黎曼 ζ 函数的交错级数解析延拓公式为: $\zeta(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-2^{-m}} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$, 其中 $\text{Re}(s) > 0, s \neq 1$, 故研究该解析延拓公式. 因 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = -\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-s}}{m} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = -\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-s}}{m} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s}$, 由黎曼积分可以知道: $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m f(\frac{n}{m})$, 所以就有 $\zeta(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{-m^{1-s}}{1-2^{-m}} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{x^s} dx$. 因为 $e^{\pi i} = \cos x + i \sin x$, 故 $e^{\pi i} = -1$, 即 $\zeta(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-s}}{2^{1-s}-1} \int_0^1 \frac{e^{\pi i x}}{x^s} dx$, 其中 $s \neq 1$ 且 $\text{Re}(s) > 0$. 不妨令 $s = a + bi$, 其中 $0 < a < 1, b \neq 0$, 所以就有:

$\zeta(a+bi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-a-bi}}{2^{1-a-bi}-1} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{a+bi}} dx$, 易知 $2^{1-a-bi}-1 \neq 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{1-a-bi} \neq 0$. 不妨设 $M(a,b) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{a+bi}} dx \circ$
 $\zeta(a-bi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-a-bi}}{2^{1-a-bi}-1} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{a-bi}} dx$, 易知 $2^{1-a-bi}-1 \neq 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{1-a-bi} \neq 0$. 不妨设 $M(a,-b) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{a-bi}} dx \circ$
 $\zeta(1-a-bi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{-a-bi}}{2^{-a-bi}-1} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{1-a-bi}} dx$, 易知 $2^{-a-bi}-1 \neq 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{-a-bi} \neq 0$. 不妨设 $M(1-a,-b) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{1-a-bi}} dx \circ$
 因 $\zeta(a+bi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-a-bi}}{2^{1-a-bi}-1} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{a+bi}} dx$, $\zeta(a-bi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-a-bi}}{2^{1-a-bi}-1} \int_0^1 \frac{e^{mxi}}{x^{a-bi}} dx$, 由黎曼勒

贝格引理可知: $M(a, b) \rightarrow 0$ 且 $M(a, -b) \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(a, -b)}{M(a, b)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x+bi} \frac{e^{-\zeta t}}{t} dt}{\int_0^{x+bi} \frac{e^{-\zeta t}}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2bi} = 1$, 所以就有 $M(a, b), M(a, -b)$ 趋近于零的速度相同, 因为 $\zeta(a+bi)$ 和 $\zeta(a-bi)$ 对于无穷大的主导项相同, 所以就有若 $\zeta(a+bi)=0$, 则 $\zeta(a-bi)=0$ 。

因为 $\zeta(s) = w(s)\zeta(1-s)$, 其中 $w(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s)$, 所以就有 $\zeta(a+bi) = w(a+bi)\zeta(1-a-bi)$, 因为 $w(a+bi) \neq 0$, 所以就有若 $\zeta(a+bi) = 0$, 则 $\zeta(1-a-bi) = 0$ 。

所以就有若 $\zeta(a+bi)=0$ ，则 $\zeta(1-a-bi)=\zeta(a-bi)=0$ 。由黎曼勒贝格引理可知： $M(1-a,-b) \rightarrow 0$ 且 $M(a,-b) \rightarrow 0$ ，所以此时就有：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\zeta(1-a-bi)}{\zeta(a-bi)} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\frac{m^{a-bi}}{2^{a-bi}} \int_{-1}^0 \frac{e^{m^x} x^{a-bi}}{1-e^x} dx}{\frac{m^{a-bi}}{2^{a-bi}} \int_{-1}^0 \frac{e^{m^x} x^{a-bi}}{1-e^x} dx} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(2^{1-a-bi}-1)m^{2a-1} \int_0^{\frac{e^{m^x}}{2^{a-bi}}} \frac{e^{-x} x^{a-bi}}{1-e^{-x}} dx}{\int_0^{\frac{e^{m^x}}{2^{a-bi}}} \frac{e^{-x} x^{a-bi}}{1-e^{-x}} dx} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2^{1-a-bi}-1)m^{2a-1}}{2^{a-bi}-1} x^{2a-1} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(2^{1-a-bi}-1)m^{2a-1}}{2^{a-bi}-1}. \text{ 易知当 } a \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\zeta(1-a-bi)}{\zeta(a-bi)} \rightarrow 0 \text{ 或者 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\zeta(1-a-bi)}{\zeta(a-bi)} \rightarrow \infty, \\ \text{此时就有 } &\zeta(1-a-bi) \neq \zeta(a-bi). \end{aligned}$$

所以就有当且仅当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\zeta(a+bi) = 0$ 才可能成立, 其中 $0 < a < 1, b \neq 0$. 因为哈代证明了 $a = \frac{1}{2}$ 时有无穷多个零点, 所以就有 $a = \frac{1}{2}$ 是零点, 即对于 $0 < a < 1, b \neq 0$, 当且仅当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\zeta(a+bi) = 0$. 即黎曼猜想成立。

第三部分：哥德巴赫猜想研究

哥德巴赫猜想：任意一个大于等于4的偶数可以写成两个质数之和。

已知：一个正整数 $K > 1$ 是合数，则 K 必有一个质因子 $P \leq \sqrt{K}$ 。

设 $N \geq 26$ 为偶数, 设 $P_i, i = 0, 1, 2, \dots$ 为从小到大依次排列的质数且 $P_0 = 2$, 设集合 $X = \{(1, N-1), (2, N-2), \dots, (N-1, 1)\}$, 设 $5 \leq P_k \leq \sqrt{N-1} < P_{k+1}$, 因为 $F(P_i) > (N-1)(1-\frac{1}{P_0}) \dots (1-\frac{1}{P_k})$, 所以就有 $F(p_i, p_j) > F(p_i)(1-1/p_0) \dots (1-1/p_k) > (N-1)(1-\frac{1}{P_0})^2 \dots (1-\frac{1}{P_k})^2$, 其中 $F(P_i, P_j)$ 为同时出现两个质数的个数。故: $F(P_i, P_j) > (N-1)(1-\frac{1}{P_0})^2 \dots (1-\frac{1}{P_k})^2 \geq P_k^2(1-\frac{1}{P_0})^2 \dots (1-\frac{1}{P_k})^2$ 。

设 $q_i, i=0,1,2,\dots$ 为从小到大依次排列的合数且 $q_0=4$ ，不妨令 $q_m = P_k - 1$ ，故 $(1 - \frac{1}{P_0})^2 \dots (1 - \frac{1}{P_k})^2 (1 - \frac{1}{q_0})^2 \dots (1 - \frac{1}{q_m})^2 = \frac{1}{P_k^2}$ ， $P_k^2 (1 - \frac{1}{P_0})^2 \dots (1 - \frac{1}{P_k})^2 = \frac{1}{(1 - \frac{1}{q_0})^2 \dots (1 - \frac{1}{q_m})^2} > 1$ ，所以就有 $F(P_i, P_j) > 1$ ，即大于等于 26 的偶数都满足哥德巴赫猜想。因为小于 26 且大于 2 的偶数都满足哥德巴赫猜想，所以就有哥德巴赫猜想成立。

第四部分：考拉兹猜想研究

考拉兹猜想：考拉兹函数 $f(h)$ ：若 h 为偶数，则 $f(h)=\frac{h}{2}$ ；若 h 为奇数，则 $f(h)=3h+1$ 。经过有限次迭代后都会回归到1。

不妨设 $a_{n+1} = \frac{3a_i + 1}{2^{f(i)}}$, $a_0 = h \gg 1$, 其中 a_i 为奇数, $f(i) \geq 1$, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots$ 。因为对于 $a_{n+1} = P(n)a_n + Q(n)$ 的通解为:

$$a_n = (a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q(k)}{\prod_{i=0}^k P(i)}) \prod_{i=0}^{n-1} P(i), \text{ 所以就有 } a_{n+1} = (h + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2^{f(i)}}{3}) \prod_{i=0}^n \frac{3}{2^{f(i)}}。$$

假设存在 $n=m, m+1, \dots$ 其中 m 为确定值, 总是使得 $a_{n+1} < a_0 = h$ 。

此时就有 $0 < \prod_{i=0}^n \frac{3}{2^{f(i)}} < 1$ ，也即 $\prod_{i=0}^n \frac{2^{f(i)}}{3} > 1$ ，其中 $n = m, m+1, \dots$ 。不妨设 $b_n = \frac{1}{3} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2^{f(i)}}{3}$ ，所以就有 $b_n = \frac{1}{3} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{2^{f(i)}}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=m+1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2^{f(i)}}{3} > \frac{1}{3} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{2^{f(i)}}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=m+1}^n 1 = \frac{1}{3} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{2^{f(i)}}{3} + \frac{n-m}{3}$ 。易知当 $n \rightarrow +\infty$ 时， $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \rightarrow +\infty$ ，此时就有 h 对 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}$ 的贡献几乎为 0。

即若假设存在 $n = m, m+1, \dots$ 其中 m 为确定值，总是使得 $a_{n+1} < a_0 = h \gg 1$ 成立，则有 h 对 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}$ 的贡献几乎为 0。

结论

第一部分内容为根据数学归纳法创新性的提出了极限归纳法并给出了其部分应用，该方法听取了某期刊的建议做了部分补充。本人认为该方法将会在数学和计算机领域展露光彩。第二部分内容为黎曼 ζ 函数的研究，听取了某音用户的建议做了部分修改，证明了黎曼猜想成立。第三部分内容为哥德巴赫猜想的一些研究。第四部分内容为对考拉兹猜想的一些研究。（第三部分内容的主要工作由二作兰建新完成，本文一作欧建做了最后的补充。其余部分则完全由一作欧建完成）。

参考文献

- [1] 吴晨昊. “数学归纳法的应用” 教学案例 [J]. 数学教学, 2017, 10: 10–11.
- [2] 吴赣昌. 高等数学: 上册 [M]. 第五版北京: 中国人民大学出版社, 2017: 145–146.
- [3] 陈秋锐, 林文贤. 最重要的数学问题 [J]. 数学教学与研究, 2013, 34: 55.
- [4] 韩可众. 黎曼猜想的探究 [J]. 河南科学, 2009, 27(6): 650.
- [5] 吴振奎. 调和级数、幂级数与黎曼猜想 [J]. 中等数学, 1999, 6: 22–24.
- [6] 杨蕴韬, 张豪. 广义函数的切萨罗极限和 zeta 函数求值 [J]. 大学数学, 2023, 39(4): 25.
- [7] 唐建国. 利用公式 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 快速计算圆周率 [J]. 大学数学, 2006, 22(4): 122.
- [8] 许宁. 黎曼函数的两种求法 [J]. 高等数学研究, 2013, 16(3): 13.
- [9] 高义. 关于黎曼 Zeta 函数的若干性质及其在复平面上的积分表示 [J]. 绵阳师范学院学报 (自然科学版), 2019, 38(8): 1.
- [10] 周慧琳, 唐子越, 张艳硕. 黎曼猜想分层级的模块化教学设计 [J]. 北京电子科技学院学报, 2023, 31(1): 147.