图像法在中学数学中的应用

钟言午
安徽省合肥市巢湖市第一中学，安徽 巢湖 238001

DOI: 10.61369/ETR.2026070035

摘　　要： 本文基于新时代中学数学课程标准的核心素养要求，探讨图像法在数学教学中的应用价值。首先概述图像法的理论基础，包括表征理论和建构主义学习理论。随后结合集合、函数、不等式、线性规划及平面向量等典型案例，详细分析图像法在解题中的具体实施过程。最后，提出教学建议，指出教师应熟练掌握图像绘制技巧，并借助多媒体工具动态展示数学变换，以提升教学效果。本文旨在为中学数学教育提供实践参考，促进数形结合思想的深入融合。

关 键 词： 图像法；数形结合；新课改；中学数学

The Application of the Graphical Method in Middle School Mathematics

Zhong Yanwu
Chaohu No.1 Middle School, Chaohu, Anhui 238001

Abstract: Based on the core competency requirements of the middle school mathematics curriculum standard in the new era, this paper explores the application value of the graphical method in mathematics teaching. It first outlines the theoretical foundations of the graphical method, including representation theory and constructivist learning theory. Subsequently, combined with typical cases such as sets, functions, inequalities, linear programming and plane vectors, it analyzes in detail the specific implementation process of the graphical method in solving mathematical problems. Finally, it puts forward teaching suggestions, pointing out that teachers should proficiently master graph-drawing skills and dynamically display mathematical transformations with the help of multimedia tools to improve teaching effectiveness. This paper aims to provide practical references for middle school mathematics education and promote the in-depth integration of the thought of combining numbers and shapes.

Keywords: graphical method; combination of numbers and shapes; new curriculum reform; middle school mathematics

数学家华罗庚曾有言：“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休”[1]。数学是研究的是数形的关系。数形是相辅相成的，在某些时候二者是可以相互转化的。

利用图像法，可以将数学问题中的数字和图像结合起来，使数值关系更直观地展示出来，以达到解题的目的。图像法的本质，它在于在研究问题的过程中，将空间形式问题转化为数量关系问题，或将数量关系问题转化为空间形式问题，使抽象的问题具体化，从而更高效地解决问题[2]。图像法也不仅仅只运用在数学这一门学课上，在中学别的学科中也扮演着重要角色。

一、理论基础

（一）表征理论

表征是信息在认知系统中的表现形式或组织结构，属于认知心理学范畴。表征是信息在大脑中的一种呈现形式。根据信息加工的观点，外源信息在被人脑加工时会以表征的形式反映在脑海里。表征是客观事物的反映，也是加工的客体。同一类事物，由于其表征方式不同，加工方式也不同。而信息来源的不同，会使得人脑对信息进行加工的方式也不同。

在中学数学教学中，我们可以将表征理解为学生在脑海中将数学知识输入、编码、变换、储存、提取的过程[3]。数学是研究的是数形的关系。这要求教师要将抽象的数学知识具象化，使学生将图像与知识点相互结合，能够探究出各种数学问题内在的规律和过程，并对其进行深入分析，以便于更高效解决问题[4]。

（二）建构主义理论

建构主义是一种关于知识和学习的理论，强调学习者的主动性，瑞士心理学家皮亚杰认为，人是在与周围环境相互作用的过程中，逐步建构起知识，从而使自身认知结构得到发展，学生学习的过程就是主动建构的过程[5]。

学生只能局限在自己的经验和已知的知识对数学知识进行构建，在数学教学中应该主动引导学生主动的进行知识的构建[6]。教师要通过多元的教学方式激发出学生的学习积极性。语言和文字

难以表达的信息结合图像就能使抽象的信息变得具体使人更好的理解[7]。通过图像可以使学生更好地对数学知识进行构建[8]。

二、运用图像法解决中学数学问题

（一）集合问题

处理集合问题时我们常用集合图和数轴图来解决问题[9]。

1. 用集合图解决集合问题

例1　班里统计同学喜欢的水果，喜欢吃西瓜的学生有28人，喜欢吃苹果的学生有37人，喜欢吃西瓜的学生中喜欢吃苹果的学生有25人。请问一共有多少学生喜欢吃水果？

分析　通过题目信息可以画出图像（见图1）。左边的小圆圈表示喜欢吃西瓜的学生人数为28人，右边的大圆表示喜欢吃苹果的学生人数为37人，两个圆圈中间的交集部分表示喜欢吃西瓜的学生中喜欢吃苹果的学生有25人，则图中三个区域的人数总和就是喜欢吃水果的学生总人数。得

$(28-25)+25+(37-25)=40$（人）

若学生一开始就直接作答非常容易因为马虎而漏掉数据。通过图像法则使题目变得更加直观。

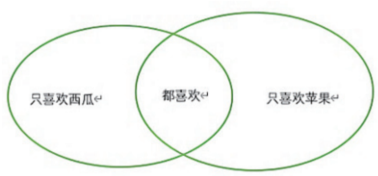

图1 学生喜欢吃水果的韦恩图

2. 用数轴图解决集合问题

例2 设集合 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|1<x<4\}$，求 $A\cup B$。

分析 将集合 A 和 B 在数轴上画出来（图2），则运算会相对简单。因而

$A\cup B=\{x|-2<x<4\}$。

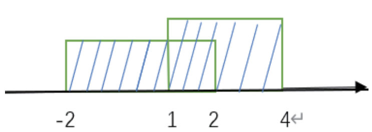

图2 两集合分布的数轴图

（二）函数问题

在函数问题的求解中，运用函数的图像会让图形和代数更为直观地联系在一起，从而将抽象的函数问题变得生动直观，进而发展学生数学抽象素养。

1. 值域问题

例2 求函数 $y=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+8)^2}$ 的值域。

分析 化简可得 $y=|x-2|+|x+8|$。将其看做数轴上的动点 $P(x)$ 到定点 $A(2)$ 和 $B(-8)$ 间的距离之和（图3）。

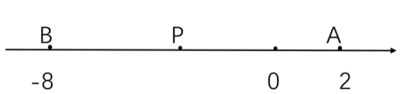

图3 $P(x), A(2), B(-8)$ 在数轴上的表示

由图3可知，当 P 点在线段 AB 上时，$y=|x-2|+|x+8|=|AB|=10$。当 P 点在线段 AB 的延长线上或反向延长线上时

$y=|x-2|+|x+8|<|AB|=10$。

所以求函数的值域是 $[10,+\infty)$。

2. 最值问题

例4 已知函数 $f(x)=\cos 2x$ 在区间 $\left[t,t+\frac{\pi}{3}\right],t\in R$ 上的最大值为 $M(t)$，则 $M(t)$ 的最小值为（ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $-\frac{1}{2}$

分析 画出函数图像，将定长为 $\frac{\pi}{3}$ 的动区间 $\left[t,t+\frac{\pi}{3}\right]$ 向右移动，观察函数的最大值，然后取其最小值即可。得到图4。

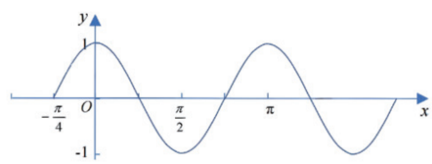

图4 函数 $f(x)=\cos 2x$ 图像

将动区间向右移动，分别得图5、图6和图7。

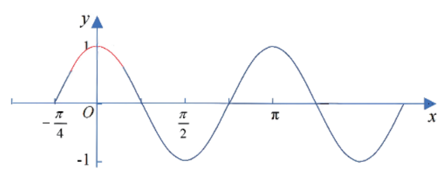

图5 动区间向右移动到 $\left(,\frac{\pi}{6}\ \frac{\pi}{6}\right)$

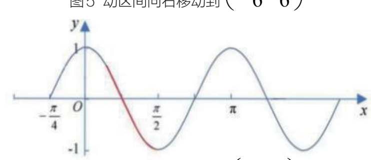

图6 动区间向右移动到 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

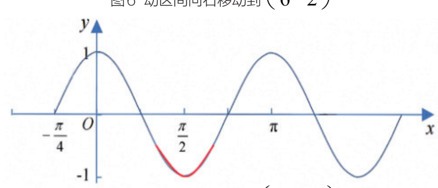

图7 动区间向右移动到 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$

显然，当动区间的中点恰好与 $f(x)$ 的极小值点重合的时候，$\max\{f(x)\}$ 即 $M(t)$ 取得最小值。此时，$t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 解得 $t=\frac{\pi}{3}$，于是

$$\mathrm{Min}\{M(t)\}=M\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$$

所以答案选 D。

3. 单调性问题

例5 求取函数 $y=x|x|-|x|$ 的单调区间。

分析 由 $y=x|x|-|x|$ 可得

$$\begin{cases} y=x^2-x, x\ge 0 \\ y=-x^2+x, x<0 \end{cases}$$

由此可得其图像（图8）。

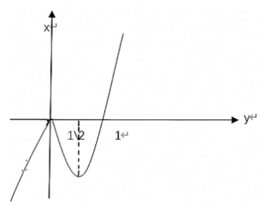

图8 函数 $y=x|x|-|x|$ 的图像

由图8可知该函数的单调递减区间是 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$，函数的单调递增区间是 $(-\infty,0]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$。

在解决函数的单调性问题中，大多都离不开图像法的应用，所以准确合理地作出符合题意的图像是解决这类问题的的关键。

（三）不等式问题

将不等式及其相关图像进行结合就可能将问题简单化，使解题过程变得更为简单直观，相对于单纯的代数方法显得尤为便捷。

1. 求参数取值

例6 若不等式 $\sqrt{4x-x^2}>ax$ 的解集是 $\{x|0<x\le 4\}$，则实数 a 的取值范围是（ ）

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(-\infty,4]$

(C) $(-\infty,0)$　　(D) $(-\infty,0]$

分析 令 $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$，$g(x)=ax$，则 $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ 的图像是以 $(2,0)$ 为圆心半径为2的圆的上半部分，但不包括点 $(0,0)$ 和点 $(4,0)$；$g(x)=ax$ 的图像是过原点斜率为 a 的直线。由已知 $\sqrt{4x-x^2}>ax$ 的解集是 $\{x|0<x\le 4\}$，即要求半圆在直线的上方，作图9，因而 $a<0$，所以选 (C)。

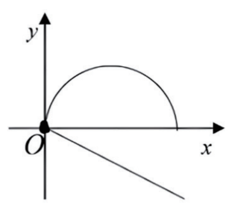

图9 $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ 和 $g(x)=ax$ 的图像

2. 证明不等式

例7 证明不等式 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$。

分析 构造直角三角形 $Rt\Delta ABC$（图10）。令 $AB=\sqrt{3}, AD=\sqrt{2}, BC=2$，则由勾股定理可得 $CD=\sqrt{6}, AC=\sqrt{7}$。

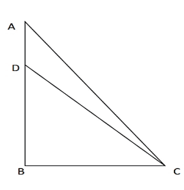

图10 构造的直角三角形 $Rt\Delta ABC$

而由三角形的性质（两边之差小于第三边）可知，$AC-CD<AB-BD$。故可证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$。

（四）线性规划问题

线性规划是最优化问题。生活中很多优化问题都可以运用线性规划来处理。将图像和数值结合起来有助于学生更好更快地解决线问题。

例8 投资方拟投资A、B两个项目，根据预测，最高回报率分别为100%和50%，最大亏损率为30%和10%。投资方拟投资总金额不高于10万元，确保可能损失的资金不高于1.8万元。问投资方对A、B两个项目应该各投资多少才能获得最大收益？

分析 设投资方对于A、B项目的投资额分别为项目 x 万元和 y 万元。根据题意可得下面限制条件不等式

$$\begin{cases} x+y\le 10 \\ 0.3x+0.1y\le 1.8 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$$

目标函数为 $f=x+0.5y$。根据上面不等式组可以作图11，图中阴影部分即为可行域。

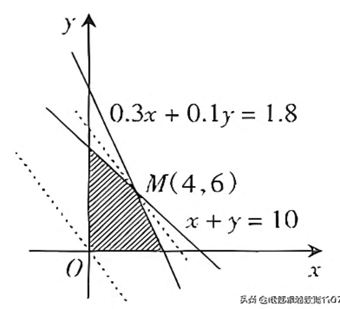

图11 限制条件对应的图像

将 $f=x+0.5y$ 改写为 $y=-2x+2f$，则当直线 $y=-2x+2f$ 过点 M 时，在 y 轴上的截距最大，即 f 取得最大值。

解 $\begin{cases} x+y=10 \\ 0.3x+0.1y=1.8 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$

将其代入 $y=-2x+2f$ 得 $f=7$。因而当投资人用4万元、6万元分别投资A、B项目时，可满足题意要求。

（五）平面向量问题

平面向量既有数值的大小又有向量的方向，图像法在平面向量问题中有着大量的运用。

例9 如图12，两块斜边长相等的直角三角形拼在一起，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x 和 y 分别为多少。

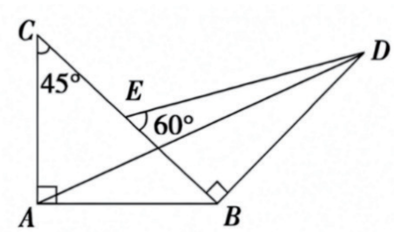

图12 两块斜边长相等的直角三角形相拼

分析 以 AB 所在的直线为 x 轴、点A为原点建立平面直角坐标系（图13），令 $AB=2$，所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2)$。过 D 作 $DF\perp AB$ 交 AB 的延长线于 F，由已知得 $DF=BF=\sqrt{3}$，

则 $\overrightarrow{AD}=(2+\sqrt{3},\sqrt{3})$。

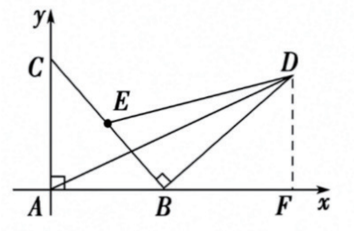

图13 以 A 点为原心建立平面直角坐标系

因为 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $(2+\sqrt{3},\sqrt{3})=(2x,2y)$，即 $2+\sqrt{3}=2x$，$\sqrt{3}=2y$，所以 $x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\sqrt{3}$。

三、几点建议

（一）应用建议

中学的数学知识是非常抽象的，所以对教师来说拥有将抽象的数学概念变成生动形象的知识传授给学生的能力格外重要[10]。而图像法这一能使抽象化具体的方法恰能帮助学生更好地理解抽象的数学概念。故教师要在课堂上发挥图像法最大的作用，丰富教师的教学手段，从而进一步激发学生的学习兴趣。图像法还有利于培养学生的数学思维，使学生养成多方面、多维度思考问题的思维模式。而不是惯性地进行单纯数值计算。由此可看出图像法在中学数学习题教学中的重要意义。

（二）如何运用好图像法

教师要熟练掌握教学中所涉及的各类基本图形。只有在熟练掌握相关知识后，才可灵活应用图像法将其融入到日常数学教学中。新课改对教师使用计算机辅助教学有了新的要求，教师要学会使用画图软件或人工智能来展示各种图形的变换过程，通过软件将数学问题直观展示出来，借助多媒体教学可使学生学习效率更高，激发学生对数学学习的热情。教师更可以通过图像的动静之间向学生展示数学之美。

四、结语

图像法作为数形结合思想的重要载体，在中学数学教学中展现出高效性与直观性。它不仅能帮助学生突破抽象知识的局限，转变对数学的刻板印象，还能通过图形化分析揭示问题的本质规律，提升学习效率。本文通过多种案例证明，图像法的应用有助于培养学生的创新思维和实际应用能力。未来教学中，教师应进一步深化图像法的运用，例如结合计算机软件动态演示数学过程，并注重数学思想（如建模与推理）的渗透，而非仅侧重于技能训练。

参考文献

[1] 华罗庚 . 谈谈与蜂房结构有关的数学问题 [M]. 北京：科学出版社，2002.

[2] 邵瑾波 . 从 " 数 " 与 " 形 " 的交融破解高中数学难题 [J]. 中学数学，2025，(17)：101-102.

[3] 吕丽妹 . 基于多元表征理论的深度学习路径探索——以 " 三角形的初步认识 " 教学重构为例 [J]. 小学教学参考，2025，(32)：71-74.

[4] 罗雨欣 . 数形结合思想方法在高中数学教学中的应用研究 [J]. 新教育，2025，(35)：28-30.

[5]〔美〕爱德华·桑代克 著 . 刘万伦 译 . 教育心理学 [M]. 上海：商务印书馆，2015.

[6] 郑林忠 . 数形结合思想在高中数学教学中的应用研究 [J]. 学周刊，2025，(127)：49-51.

[7] 王长丽 . 数形结合与可视化教学在高中数学中的协同应用研究 [J]. 课堂内外（高中版），2025，(35)：66-67.

[8] 张云月 . 论数形结合法在高中数学解题教学中的有效应用 [J]. 数理天地（高中版），2025，(23)：120-122.

[9] 刘传峰 . 数形结合思想在高中数学解题中的深度应用研究 [J]. 数理天地（高中版），2025，(21)：107-109.

[10] 中华人民共和国教育部 . 义务教育数学课程标准（2022年版）[S]. 北京：北京师范大学出版社，2022.

