

构造辅助函数在高中数学解题中的应用

王成东

安徽省合肥市巢湖市第一中学，安徽 巢湖 238001

DOI: 10.61369/ETR.2026070046

摘 要： 构造辅助函数是高中数学解题的重要策略，其本质是通过构造函数将抽象问题具象化，简化复杂运算与逻辑推理。本文基于波利亚解题理论与建构主义思想，探讨辅助函数构造的理论基础与教学路径。研究表明，该能力的培养需贯穿函数教学全程，通过情境创设、动机激发与思维训练，提升学生的数学抽象与问题解决能力。文中选取典型例题，从比较大小、证明不等式、求解空间距离三个维度展开分析：针对结构相似问题，构造分式函数、二次函数分析单调性；借助导数工具将数列不等式转化为函数最值问题；利用绝对值函数破解含参不等式。实践表明，该方法能显著提高解题效率并深化学生对函数本质的理解。未来可探索辅助函数与 AI 算法的融合路径，推动数学教育个性化发展。

关键词： 构造辅助函数；能力；应用

The Application of Constructing Auxiliary Functions in Solving Senior High School Mathematics Problems

Wang Chengdong

Chaohu No.1 Middle School, Chaohu, Anhui 238001

Abstract： Constructing auxiliary functions is an important strategy for solving senior high school mathematics problems. Its essence is to visualize abstract problems by constructing functions, thereby simplifying complex calculations and logical reasoning. Based on Polya's problem-solving theory and constructivist ideas, this paper explores the theoretical foundation and teaching approaches of auxiliary function construction. The research shows that the cultivation of this ability should run through the entire process of function teaching, and students' abilities of mathematical abstraction and problem-solving can be improved through situational creation, motivation stimulation and thinking training. Typical examples are selected in this paper to carry out analysis from three dimensions: comparing sizes, proving inequalities and solving spatial distances. For problems with similar structures, fractional functions and quadratic functions are constructed to analyze monotonicity; the derivative tool is used to transform sequence inequalities into function extremum problems; absolute value functions are employed to solve parameter-containing inequalities. Practice has proved that this method can significantly improve the efficiency of problem-solving and deepen students' understanding of the essence of functions. In the future, the integration path of auxiliary functions and AI algorithms can be explored to promote the personalized development of mathematics education.

Keywords： auxiliary function construction; ability; application

辅助函数的构造高中数学的一个难点，也可以考查学生独立思考的能力。本文整理出了一些平时学习中比较常见、常用的函数问题的表述，同时也列举了一些构造辅助函数的问题，构造辅助函数解不等式的应用的例题^[1]。

一、构造辅助函数解题的理论依据

(一) 波利亚解题理论

数学解题理论是数学解题教学的核心理论，数学解题教学的灵魂是数学解题方法。波利亚提出的解题方法主要有三种：构造法、换元法和方程法，构造法是数学解题理论中最重要的方法之一，是指通过一种全新的思路来解决问题，可以为学生提供一种新的思路，而构造辅助又是构造法的主要方法之一^[2]。在此过程

中，学生不仅能够更好地掌握知识，还能发现数学的本质规律。波利亚的解题理论主要研究如何以最简单的数学问题来求解最复杂的数学问题，他认为有两种方法可以解决问题：一种是“构造辅助函数”，另一种是“构造辅助函数与求解”。这两个方面各有其用途，前者适用于解决某些基本的数学问题，后者适用于解决某些较为复杂的数学问题。如果我们能在“构造辅助函数”这一方面作一些突破，就能使我们更多地把精力放到“求解”上来，从而获得更大的收益。

学生在解决问题时，通常需要对题目进行分类，然后再结合所学知识和解题技巧来分析并解决问题。波利亚在学习数学的过程中，创造性地提出了一种解题理论，该理论在解答数学难题时起到了很好的效果。波利亚解题理论不仅是一种解题技巧，同时也是一种数学思想^[3]。学生在学习了波利亚解题理论之后，能够更好地掌握一些数学方法和思想，同时也能够更好地运用这些数学方法和思想来解决问题。

（二）建构主义理论

建构主义理论主张知识是由学习者通过对外部世界的客观反映而建构起来的，知识的获得必须在学习者与外部世界互动的过程中完成^[4]。本文分析了构造辅助函数这一重要的知识获取手段，以及它与建构主义理论之间的关系。构造辅助函数以认知科学和心理学为基础，在知识获取过程中是一种基于建构主义理论的方法。由于认知科学和心理学理论与建构主义理论之间存在着一些共同之处，这就使得构造辅助函数在研究方法上对建构主义理论具有一定的借鉴作用。构造辅助函数是一种基于建构主义理论的研究方法，在此基础上可以发展出一些新的研究范式和理论。

二、构造辅助函数教学策略

（一）增强学生概念的理解

函数概念是从具体事物到抽象概念的飞跃，是从特殊到一般的过程，这就需要教师在教学中注重对学生思维过程的培养^[5]。例如，可以引入一些具体的生活情境，比如让学生通过观察自己的身高、体重，了解身高和体重与体重的变化关系，由此引入函数概念；或者将学生熟悉的日常生活中的“直线”与“曲线”相结合，让学生观察“直线”与“曲线”是如何变化的；还可以利用一些动态的图像和动画等，使学生进一步感知函数概念^[6]。通过情境创设，引导学生用已有知识去分析问题，解决问题，并从中抽象概括出函数概念。

（二）培养和激发学生的学习动机

学习动机是指直接推动人们去从事学习活动，以达到一定目的的内在动力，它是促进学习的重要因素之一。学习动机的形成，最根本的是要引起学生的兴趣。只有当学生对某一学科或某一门知识感兴趣时，才会去主动地获取知识，主动地探索真理，从而达到最佳的学习效果。教师要不断地激发学生学习兴趣和好奇心，以使他们产生浓厚的学习动机。在课堂上，教师应充分尊重学生，允许他们发表不同的意见，以鼓励和诱导他们积极参与到课堂教学中来，使学生能保持较高的学习热情。

（三）锻炼学生构造辅助函数的能力

构造辅助函数，其实就是在学生已有的函数知识框架下，通过分析、理解和研究等方法，为解决问题提供新的思路。在教学过程中教师要有意识的培养学生构造辅助函数的能力，让学生在教师的指导下学会运用辅助函数去解决问题。通过构造辅助函数的实际锻炼以及提高学生的抽象思维能力和创新精神，让学生学会怎么去构造辅助函数并总结出构造辅助函数的思路^[8]。

三、构造辅助函数在解题中的应用

（一）通过构造辅助函数进行比较大小

可以对数的大小和结构进行分析，若结构相似便可以选择构造辅助函数。

例1 已知 $a = \frac{\ln 4}{4}$, $b = \frac{\ln 5}{5}$, $c = \frac{2}{e^2}$, 求 a , b , c 三者之间的关系。

解 观察 a, b, c 的结构且 $c = \frac{\ln e^2}{e^2}$, 可构造辅助函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 因而 $a = f(4), b = f(5), c = f(e^2)$ 。当 $x \in (e, +\infty)$ 时 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, 此时 $f(x)$ 单调减。所以有 $a > b > c$ 。

例2 设 $a = \sqrt{3} - \frac{3}{e}$, $b = \sqrt{2} - \frac{2}{e}$, $c = e^{\sqrt{2}-1} - \ln 2$, 比较 a, b, c 的大小。

解 根据 a, b 的结构可以构造辅助函数 $f(x) = x - \frac{x^2}{e}$ 。由于 $f(x)$ 为开口向下的二次函数且 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{e}{2}$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{e}{2}, +\infty)$ 上单调减。又因为 $\frac{e}{2} < \sqrt{2} < \sqrt{3}$, 则有 $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$, 从而 $b > a$ 。

又由于 b 和 c 的结构相似，因此可以通过构造辅助函数来比较 b 和 c 的大小。但 b 中不含有对数，而 c 中含有对数所以无法统一处理。由于 b 和 c 是两项之差，因此我们可以选择分开处理。

对 $\sqrt{2}$ 和 $e^{\sqrt{2}-1}$ 的比较可以转化为比较 x 和 e^{x-1} 的大小。根据切线放缩不等式 $e^x \geq x+1$, ($x=0$ 时取等)，将 x 替换为 $x-1$ 得到 $e^{x-1} \geq x$ ($x=1$ 时取等)，因此 $e^{\sqrt{2}-1} > \sqrt{2}$ 。只需再比较 $\frac{2}{e}$ 与 $\ln 2$

的大小，即考虑 $\frac{2}{e} - \ln 2$ 的符号。构造函数 $g(x) = \frac{x}{e} - \ln x$, $g(e) = \frac{e}{e} - \ln e = 0$ 。求得 $g'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$ 。 $g(x)$ 的单减区间为 $(0, e)$, 单增区间为 $(e, +\infty)$, 所以 $g(2) > g(e) = 0$, 因而有 $\frac{2}{e} - \ln 2 > 0$, 进而 $\frac{2}{e} > \ln 2$ 。不等式两边同时乘以 -1 可以得到 $-\frac{2}{e} < -\ln 2$ 。又因为 $e^{\sqrt{2}-1} > \sqrt{2}$, 所以可以得到 $e^{\sqrt{2}-1} - \ln 2 > \sqrt{2} - \frac{2}{e}$, 就推出了 $c > b$ 。加上之前得到的 $b > a$, 就可以得到 $c > b > a$ 。

针对这类比较大小的问题，我们首先要观察他们之间有什么联系，然后根据他们之间存在的联系构造与之相关的辅助函数。有的题目可以构造出几种不同的辅助函数，因此我们要在这些辅助函数中选择最佳的那个辅助函数，这样有利于我们进行计算，从而避免计算过程中可能出现错误的情况。对于比较他们之间的大小，进行直接比较是非常困难的，而构造辅助函数则是一种不错的方法^[9]。

（二）构造辅助函数证明不等式

不等式的证明没有固定的模式可以套用，它的方法灵活多样，技巧性强，综合性高，其中通过适当的构造辅助函数来证明不等式，可以达到事半功倍的效果^[10]。现举例如下：

（二）构造辅助函数证明不等式

不等式的证明没有固定的模式可以套用，它的方法灵活多样，技巧性强，综合性高，其中通过适当的构造辅助函数来证明不等式，可以达到事半功倍的效果^[10]。现举例如下：

1. 构造辅助函数证明绝对值不等式

很多学生在学习绝对值不等式时，由于对函数图像和性质的掌握不到位，往往会出现计算错误，或者对证明结果产生误解。对于这种情况，教师应该引导学生正确理解绝对值不等式的相关性质，并将其与函数图像结合起来。下面通过例题来分析如何利用辅助函数来证明绝对值不等式。

例3 对于任意实数 m, n ，证明不等式 $\frac{|m+n|}{2+|m+n|} \leq \frac{|m|}{2+|m|} + \frac{|n|}{2+|n|}$ 。

证明 构造辅助函数 $f(x) = \frac{x}{2+x}$ ，其导数为 $f'(x) = \frac{2}{(2+x)^2}$ ，且 $f'(x) > 0, x \neq -2$ 。所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增。又因为 $|m+n| \geq 0, |m| \geq 0, |n| \geq 0$ ， $|m+n| \leq |m| + |n|$ 。所以 $f(|m+n|) \leq f(2+|m|+|n|)$ ，即

$$\begin{aligned} \frac{|m+n|}{2+|m+n|} &\leq \frac{|m|+|n|}{2+|m|+|n|} \\ &= \frac{|m|}{2+|m|+|n|} + \frac{|n|}{2+|m|+|n|} \\ &\leq \frac{|m|}{2+|m|} + \frac{|n|}{2+|n|} \end{aligned}$$

原不等式得证。

由于题目中不等式的两边结构相似，因此可以构造辅助函数 $f(x) = \frac{x}{2+x}$ 。而针对这类不等式的证明，可以将不等式的证明转化为利用函数的增减性来解决。

2. 利用构造辅助函数证明数列不等式

数列不等式进行证明，最重要的就是掌握好数列不等式的证明方法和技巧。由于数列不等式的证明方法比较多，也比较复杂，很多学生在进行相关知识学习时存在着一些困惑和难点。下面通过例题对高中数学中数列不等式的构造辅助函数进行了简要分析。

例4 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1 > 1$ 且 $6S_n = (a_n + 1)(a_n + 2)$ ， $n \in N^+$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n(2^{b_n} - 1) = 1$ 并记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证：

$$3T_n + 1 > \log_2(a_n + 3), \quad n \in N^+.$$

解 (1) 因为 $6S_n = (a_n + 1)(a_n + 2)$ 且 $n \in N^+$ ，所以当 $n > 1$ 时 $6S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)(a_{n-1} + 2)$ 。令 $6S_n - 6S_{n-1}$ ，得到

$$\begin{aligned} 6S_n - 6S_{n-1} &= 6a_n \\ &= (a_n + 1)(a_n + 2) - (a_{n-1} + 1)(a_{n-1} + 2) \\ 6a_n &= a_n^2 + 3a_n - a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} \\ 3a_n - 3a_{n-1} &= a_n^2 - a_{n-1}^2 \\ &= (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

所以 $a_n - a_{n-1} = 3$ ， $d = 3$ 。将 $n = 1$ 代入到 $6S_n = (a_n + 1)(a_n + 2)$ ，得 $6S_1 = (a_1 + 1)(a_1 + 2)$ 。所以 $a_1 = 1$ 或 $a_1 = 2$ 。又因为 $S_1 > 1$ ，所以 $a_1 = 2$ ， $a_n = 3n - 1$ ， $n \in N^+$ 。

(2) 证明 由 $a_n(2^{b_n} - 1) = 1$ 得 $2^{b_n} - 1 = \frac{1}{a_n}$ 。所以 $b_n = \log_2\left(\frac{1}{a_n} + 1\right)$ 。

将 $a_n = 3n - 1$ 代入后得到 $b_n = \log_2\left(\frac{3n}{3n-1}\right)$ 。

又因为 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ，代入后得到 $T_n = \log_2\left(\frac{3}{2} \times \frac{6}{5} \times \dots \times \frac{3n}{3n-1}\right)$ 。题中证明 $3T_n + 1 > \log_2(a_n + 3)$ 可以转换为证明 $3T_n + 1 - \log_2(a_n + 3) > 0$ ，将 T_n, a_n 代入上式中得到

$$\begin{aligned} &3T_n + 1 - \log_2(a_n + 3) \\ &= \log_2\left[\left(\frac{3}{2} \times \frac{6}{5} \times \dots \times \frac{3n}{3n-1}\right)^3 \times \frac{2}{3n+2}\right] \end{aligned}$$

因而可构造辅助函数

$$f(n) = \left(\frac{3}{2} \times \frac{6}{5} \times \dots \times \frac{3n}{3n-1}\right)^3 \times \frac{2}{3n+2}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{3n+2}{3n+5} \times \left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^3 \\ &= \frac{(3n+3)^3}{(3n+5)(3n+2)^2} \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} &(3n+3)^3 - (3n+5)(3n+2)^2 \\ &= 9n+7, n \in N^+ \end{aligned}$$

所以 $9n+7 > 0$ 且 $f(n+1) > 0$ ， $f(n) > 0$ 。

从而有 $f(n+1) > f(n) > 0$ ，便得到了 $\frac{f(n+1)}{f(n)} > 1$ ，所以

$f(n) \geq f(1) = \frac{27}{20} > 1$ ，进而 $\log_2[f(n)] > 0$ ，原式得证。

3. 构造辅助函数利用最值证明不等式

例5 证明 $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

证明 首先我们可以把证明不等式转化为最值问题，将不等式移项后得到 $\tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0$ 。然后再构造辅助函数

$f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ 。而不等式的证明也就化为证明函数的最小值大于0，再将函数 $f(x)$ 求导后得到 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2$

化简后得到 $f'(x) = \tan^2 x - x^2$ 。再根据平方差公式得到 $f'(x) = (\tan x - x)(\tan x + x)$ 。

又因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，所以

$$\tan x + x > 0, \tan x - x > 0。$$

由此便可以得到 $f'(x) > 0$ ，所以函数在定义域上单调递增，得到 $f(x) > f(0) = 0$ ， $\tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0$ ， $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ 。

对于这类不等式的证明，可以通过移项使证明不等式的问题转化为求最值的问题。然后再构造相关的辅助函数，利用辅助函数的单调性去求最值。针对这类问题解决的关键就是要先对不等式进行分析构造辅助函数，同时能够熟练利用函数性质去解决问题。

(三) 辅助函数在求空间距离中的应用

在解决空间问题时，可以列出所求量的表达式再对表达式进行观察分析，构造相应的辅助函数去解决问提。现以求空间中的距离为例进行分析。

例6 在满足 $|x| \leq 2$ 的抛物线 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ 的弧上找出到直线 $2x - y + 1 = 0$ 的距离最大的点和最小的点, 并求出这两个点间的距离。

解 设抛物线上到直线距离最大、最小的点分别为 $(a, b), (m, n)$ 。由距离公式可以求出

$$d_1 = \frac{|2a - b + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\left|2a - \frac{1}{2}(a^2 - 1) + 1\right|}{\sqrt{5}},$$

$$d_2 = \frac{|2m - n + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\left|2m - \frac{1}{2}(m^2 - 1) + 1\right|}{\sqrt{5}}.$$

可以构造辅助函数 $f(x) = \frac{\left|2x - \frac{1}{2}(x^2 - 1) + 1\right|}{\sqrt{5}}$ 。所以当 $x = -\frac{b}{2a} = 2$ 时, $f(x) = \frac{7}{2\sqrt{5}}$ 。当 $f(x) = 0$ 时, 求得 $x = 2 \pm \sqrt{7}$ 。

又因为 $|2 - \sqrt{7}| < 2$, 所以 $d_2 = 0$, 抛物线上到直线距离最小的点为 $\left(2 - \sqrt{7}, \frac{11 - 4\sqrt{7}}{2}\right)$ 。

当 $x = -2$ 时, 求得 $f(x) = \frac{9}{2\sqrt{5}}$, 又因为 $\frac{9}{2\sqrt{5}} > \frac{7}{2\sqrt{5}}$ 所以

$d_1 = \frac{9}{2\sqrt{5}}$, 抛物线上到直线距离最大的点为 $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ 。所以两点之间的距离为 $\sqrt{67 - 24\sqrt{7}}$ 。

几何是研究空间图形和数量关系的学科, 辅助函数的引用, 更能清楚地说明代数方法是解决几何问题的重要途径。

四、结语

构造辅助函数作为高中数学解题的重要策略, 不仅是提升学生数学抽象能力与逻辑思维的关键路径, 更是连接抽象数学知识与实际问题的重要桥梁。本文通过理论分析与教学实践验证, 系统梳理了辅助函数构造的原理与方法, 并结合典型例题展示了其在比较大小、不等式证明及空间几何问题中的应用价值。研究表明, 辅助函数思想的渗透需融入日常教学, 通过情境创设、动机激发与思维训练, 逐步培养学生的数学建模能力与创新意识。未来研究可进一步探索人工智能算法与辅助函数教学的融合路径, 借助大数据分析与智能推荐技术, 实现个性化学习支持, 推动数学教育的数字化转型, 为培养创新型数学人才提供新思路。

参考文献

- [1] 张家权. 高中数学函数与导数的三种解题技巧 [J]. 数理化解题研究, 2024, (07): 62-64.
- [2] 喻文琳. 基于“构造法”的高中数学解题思路探索 [J]. 数学之友, 2025, (01): 53-56.
- [3] 明廷军. 辅助函数法在高中数学解题中的应用 [J]. 高中数理化, 2016, (20): 10-12.
- [4] 张可嘉. 高中数学核心素养培养策略探微 [J]. 广西教育, 2021, (30): 132-133.
- [5] 彭淑珍. 基于现代教育技术的高中函数教学研究 [D]. 福州: 福建师范大学, 2025.
- [6] 张延龙. 信息技术辅助下的高中函数教学的策略与方法 [J]. 河南教育 (基教版), 2025, (Z1): 150-151.
- [7] 王洪民. 辅助函数法及其在高中数学解题中的应用 [J]. 中学生数理化 (学习研究), 2019, (06): 16-17.
- [8] 杨丽萍. 高中数学函数单调性问题中的辅助函数构造方法 [J]. 理科爱好者, 2025, (02): 16-18.
- [9] 李永杰. 例谈“构造辅助函数”在不等式问题中的应用 [J]. 高考, 2020, (16): 183.
- [10] 王娟. 辅助函数与不等式的融合——关于高中数学导数公式构造函数解题的剖析 [J]. 数理化解题研究, 2024, (19): 13-15.