

检流计偏转线圈运动特性的研究

卢翠珍¹, 陆大同²

1. 百色学院, 广西 百色 533000

2. 百色职业学院, 广西百色 533000

DOI: 10.61369/ME.2026010027

摘 要 : 为了帮助人们更好地理解检流计的工作原理, 掌握其正确使用方法; 从高灵敏度检流计的结构、磁电系检流计工作原理, 运用电磁学的知识和数学方法, 分析检流计偏转线圈在各种运动状态的数学表达式, 研究其运动规律。

关 键 词 : 检流计; 偏转线圈; 运动特性

Research on the Motion Characteristics of the Deflection Coil in a Galvanometer

Lu Cuizhen¹, Lu Datong²

1. Baise University, Baise, Guangxi 533000

2. Baise Vocational College, Baise, Guangxi 533000

Abstract : To facilitate a better understanding of the working principles of galvanometers and to master their correct usage, this study delves into the structure of high-sensitivity galvanometers and the working principles of magnetoelectric galvanometers. By applying knowledge of electromagnetism and mathematical methods, we analyze the mathematical expressions for the deflection coil of a galvanometer under various motion states and investigate its motion laws.

Keywords : galvanometer; deflection coil; motion characteristics

一般的磁电系仪表的线圈安装在轴承上, 通过游丝来维持平衡, 并用指针指示偏转。由于整个可动部分支撑在轴承上, 存在摩擦, 因而需要比较大的电流才能获得转动力矩, 灵敏度比较低。显然对于光生电流、生物电流、温差电动势的微弱电流或电压是不足以让其有所反应, 为此必须提高灵敏度, 检流计正是在这一基础上应运而生^[1]。

一、高灵敏度的检流计

为提高检流计的灵敏度, 就要在结构上采取措施, 使它轻巧灵活。因此, 可动线圈将采用无骨架的结构, 使重量变轻与厚度变薄, 磁路的工作气隙变短, 磁感强度增加; 此外, 可动线圈的支撑方式不用轴和轴承, 将其用张丝或吊丝吊挂, 这样就可消除轴尖与线圈间的接触所产生的摩擦, 即使是在很小的力矩下线圈也能偏转; 最后, 为达到加大指针长度, 提高灵敏度的目的, 用光标指示来代替指针, 通过光点的多次反射成像在标尺上的光标位置来表示线圈的偏转程度。改进后的结构图如图1所示, 动圈由吊丝悬挂起来, 吊丝的作用是支撑可动部分, 产生反作用力矩, 为动圈导入电流。动圈的另一端的电流引线为金属丝, 只起到导流的作用而不产生力矩。另外, 在动圈的上端还装有反射光线的

反射镜, 光束由光源入射到小镜上, 当动圈中通过电流时, 动圈中的电流与固定磁场相互作用产生转动力矩。当动圈偏转角为 α 时, 根据数学知识知道, 反射光线与入射光线之间的夹角为 2α , 光路如图2所示, 这时光点在标尺上偏转距离为 n , 标尺到小镜的距离为 l , 由图可得

$$\tan 2\alpha = \frac{n}{l} \quad (\text{式1})$$

当 l 远远大于 n 且 α 很小时, 可近似认为 $\tan 2\alpha \approx 2\alpha$, 则上式可写成 $2\alpha = \frac{n}{l}$, 即光点在标尺上的偏转距离为 $n = 2\alpha l$ 。当反射镜与标度尺的距离 l 一定时, 偏转角度越大, 则光点在标度尺上的偏转距离 n 也越大, 因此可以用偏转距离 n 的多少来表示偏转角度 α 的大小, 即表示被测电流的大小。

作者简介:

卢翠珍 (1969-), 女, 汉族, 广西横县人, 本科, 高级讲师, 研究方向: 电路设计与维修;

陆大同 (1969-), 男, 壮族, 广西平果人, 研究生, 教授, 研究方向: 自动化。

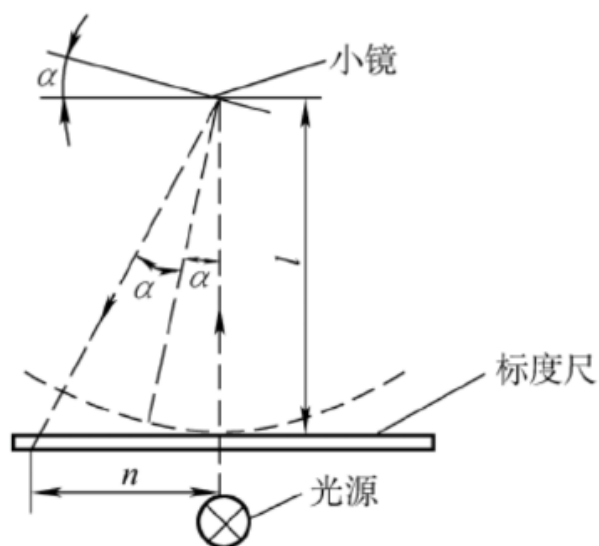


图1改进后的结构

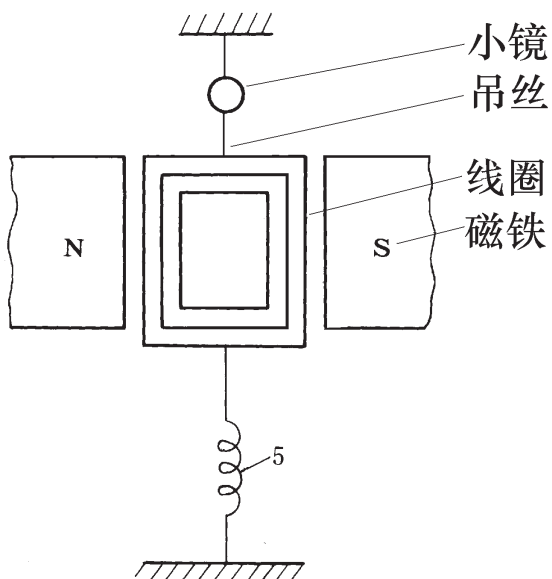


图2光路图

二、磁电系检流计工作原理

磁电系检流计工作原理是通电后的线圈在磁场环境中因受到电磁力矩的作用而发生转动。当装置中的可动线圈通入电流时，线圈各边的电流因处在永久磁铁所产生的磁场中，从而受到电磁力的作用，其中线圈的两条水平边所受电磁力大小相等、方向相反、且在同一直线上，因而相互抵消；而线圈的两条竖直边虽然所受电磁力大小相等、方向相反、但不在同一直线上，从而形成转动力矩，使可动部分转动^[2]。原理如图3所示。

设线圈中通过的电流为 I ，两个极掌与圆柱形铁芯之间的磁感强度为 B ，可动线圈的匝数为 N ，可动线圈的竖直边长为 l ，转轴中心到竖直边的距离为 r ，根据左手定则可以判断可动线圈两条竖直边所受电磁力的大小为

$$F = NBIl \quad (\text{式2})$$

则这两竖直边产生的总转动力矩大小为

$$M = 2(F \cdot r = NBIl \cdot 2r = NBIS \quad (\text{式3}), \quad 2r \text{ 恰好是线圈水平边的长度。}$$

因气隙中的磁场呈均匀辐射状，所以磁感强度 B 恒定不变，对于已绕制好的线圈，其匝数 N 和有效面积 S 不变。因此，转动力矩 M 的大小取决于被测电流 I 的大小，方向由流进线圈的电流方向决定。

线圈的转动会导致吊丝发生形变，而这一形变进一步会形成一个与偏转力矩方向相反的力矩，称为反作用力矩（或阻力矩），其大小与吊丝的变形程度成正比，即与线圈的偏转角度成正比。即

$$M_f = D\alpha \quad (\text{式4})$$

其中 D 为吊丝的反作用矩系数，其大小由吊丝的材料性质、形状和特点决定。

随着偏转角 α 的增大，反作用力矩也将增大，而转动力矩在被测电流不变时是恒定的，当反作用力矩增大到一定数值时，会与转动力矩形成大小相等、方向相反的平衡状态，此时的可动部分将趋于稳定，最终停止在对应的平衡位置上。指针也就停止在某一偏转角上。根据力矩平衡条件可得

$$D\alpha = NBIS$$

所以有 $\alpha = \frac{NBS}{D}I$ 或 $I = \frac{D}{NBS}\alpha = K_I\alpha$ （式5），其中的 $K_I = \frac{D}{NBS}$ 为灵敏度。

由（式5）可知，指针的偏转角 α 与被测电流 I 呈正比关系。基于这一特性，仪表可通过指针的偏转程度来衡量被测电流的大小，并借助指针在标度尺上对应的偏移格数，直接读出电流的具体数值。

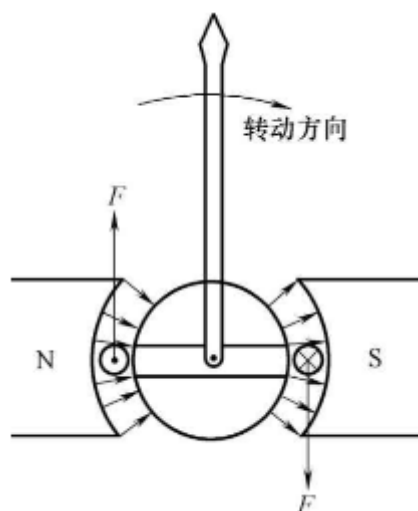


图3工作原理图

三、检流计偏转线圈运动特性分析

磁电系仪表的可动线圈发生转动时,其闭合铝框因切割气隙磁场中的磁感线,进而感应形成涡流,该涡流与气隙磁场之间产生相互作用,最终形成一个方向与可动部分转动方向刚好相反的电磁阻尼力矩^[3]。此力矩对可动部分在平衡位置附近的摆动起到抑制作用,使偏转线圈尽快在平衡位置停止下来。不过,高灵敏度检流计的动圈并未采用铝制框架,因此缺乏框架带来的阻尼作用,其阻尼效应完全依赖于动圈与外部电阻构成的回路来实现。当动圈受到驱动力矩后,会因惯性冲过平衡点;加之可动部分重量轻、运行阻力小,且无轴承摩擦力影响,在定位力矩的作用下,动圈会围绕平衡点持续摇摆,无法快速稳定在平衡位置,这种摇摆现象甚至可能持续数分钟乃至数十分钟,使测量者无法迅速读数。为此必须进一步研究偏转线圈的运动规律,以便了解检流计的最佳工作状态。

假设可动线圈通入电流以后获得的转动力矩为 M , 根据牛顿第二定律,该力矩需克服三类阻力矩,分别为吊丝的阻力矩、运动过程中产生的电磁阻尼力矩以及惯性力矩等。基于这一关系,可推导出可动线圈的运动方程为

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + P \frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = M \quad (\text{式6})$$

式中 J 为转动惯量, $J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ 为惯性力矩; P 为偏转线圈与外电阻构成的阻尼系数, $P \frac{d\alpha}{dt}$ 为与运动角速度成正比的电磁阻尼力矩; $D\alpha$ 为吊丝的阻力矩。

显然,这是一个二阶非齐次微分方程,通过解这个方程就可以得出检流计偏转线圈的运动规律。其解有特解和通解两个部分,即

$$\alpha = \gamma + \alpha' \quad (\text{式7})$$

其中 α' 为方程的特解,它表示线圈稳定以后,即 $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0$ 时,线圈所停的平衡位置,因为当 $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0$ 时,(式6)可以写成 $D\alpha = M$ 。而此时的 $\alpha = \alpha'$, 所以 $D\alpha' = M$ 。

γ 为微分方程的通解,于是把(式7)代入(式6)

$$J \frac{d^2(\alpha' + \gamma)}{dt^2} + P \frac{d(\alpha' + \gamma)}{dt} + D(\alpha' + \gamma) = M$$

$$J \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + P \frac{d\gamma}{dt} + D\alpha' + D\gamma = M$$

得齐次微分方程 $J \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + P \frac{d\gamma}{dt} + D\gamma = 0$ (式8), 明显就是一个典型的振动方程。

其特征方程为 $J s^2 + P s + D = 0$ (式9), 特征根 s 由求根公式求得:

$$s_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4JD}}{2J} = -\frac{P}{2J} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4J^2} - \frac{4JD}{4J^2}} = -\frac{P}{2J} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4J^2} - \frac{D}{J}}$$

也可以写为 $s_{1,2} = \sqrt{\frac{D}{J}}(-\frac{P}{2\sqrt{JD}} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4JD} - 1})$ (式10), 为了简便令

$\sqrt{\frac{D}{J}} = \omega_0$, $\frac{P}{2\sqrt{JD}} = \beta$, 则上式可写成 $s_{1,2} = \omega_0(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})$ (式11) β 为阻尼因数,与阻尼系数 P 有关。

由于检流计没有其他阻尼装置,只靠动圈本身的感应电动势通过外电路电阻产生阻尼,如果偏转线圈在气隙中产生的感应电动势为 e , 偏转线圈和外电路的总电阻为 R , 那么产生的电磁阻尼力矩为

$$M' = \Psi i = N\phi \frac{e}{R} = -N\phi \frac{1}{R} N \frac{d\phi}{dt} = -N\phi \frac{1}{R} NBS \frac{d\alpha}{dt} \quad (\text{式12})$$

所以阻尼系数 $P = N\phi \frac{NBS}{R} = \frac{(N\phi)^2}{R}$ 。可见回路总电阻越大,阻尼系数 P 就越小,也就是 β 值越小。而在(式11)中, β 的取值可以是大于1、小于1或等于1,不同的取值将分别对应于线圈不同的运动状态,运动状态的不同又源自于线圈运动中所受的电磁阻尼不同,因此需要用表达式定量地描述线圈的运动特性。

当 $\beta < 1$ 时,(式11)中的 β , 故特征方程(式9)有两个不相等的虚根,即

$$s_{1,2} = \omega_0(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}i) \quad (\text{式13})$$

在这种情况下,齐次微分方程(式9)解的形式为 $\gamma = e^{\alpha'x}(C_1 \sin \beta'x + C_2 \cos \beta'x)$, 结合(式13)得通解 γ 中的实部 $\alpha' = -\omega_0\beta$, 虚部 $\beta' = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}$, 所以

$$\gamma = e^{-\omega_0\beta t}(C_1 \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t + C_2 \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t) \quad (\text{式14})$$

式中的 C_1 、 C_2 为积分常数,与运动初始条件有关。当给定 $t=0$ 时, $\alpha=0$, 由(式7)得 $\gamma = -\alpha'$, 则 $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d(-\alpha')}{dt} = 0$ 。把它们代入(式14)得

$$-\alpha' = \frac{1}{e^0}(C_1 \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 \times 0 + C_2 \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 \times 0)$$

$$\text{所以 } C_2 = -\alpha', \text{ 而 } \frac{d\gamma}{dt} = (-\omega_0\beta)e^{-\omega_0\beta t}(C_1 \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t + C_2 \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t) + e^{-\omega_0\beta t}(C_1 \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t \times \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 - C_2 \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t \times \sqrt{1-\beta^2}\omega_0)$$

$$\text{所以 } 0 = (-\omega_0\beta)\frac{1}{e^0} \times C_2 + \frac{1}{e^0} \times C_1 \times \sqrt{1-\beta^2}\omega_0$$

$$C_1 = \frac{C_2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-\alpha'\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

则通解

$$\begin{aligned} \gamma &= e^{-\omega_0\beta t}(\frac{-\alpha'\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t - \alpha' \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t) \\ &= e^{-\omega_0\beta t} \frac{-\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t + \sqrt{1-\beta^2} \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t) \end{aligned}$$

利用三角函数对上式进行化简

$$\begin{aligned} &= \frac{-\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\omega_0\beta t}(\cos \phi \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t + \sin \phi \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t) \\ \gamma &= \frac{-\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\omega_0\beta t} \sqrt{\beta^2 + (\sqrt{1-\beta^2})^2} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t \\ &= \frac{-\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\omega_0\beta t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\beta^2} t + \phi) \end{aligned}$$

$$\text{而 } \phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = \arctan \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta^2}},$$

$$\text{所以 } \gamma = \frac{-\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\omega_0\beta t} \sin(\sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t + \arctan \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta^2}})$$

$$\alpha = \alpha' - \frac{\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-\beta^2} \omega_0 t + \arctan \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta^2}}) \quad (\text{式15})$$

从(式15)可以看出, 偏转角 α 由两部分构成, 第一部分为偏转线圈稳定后的偏转值 $\alpha' = KI$, 也就是偏转线圈最终停留的位置; 第二部分是时间 t 的正弦函数, 并含有衰减因子 $e^{-\omega_0 t}$, 说明偏转线圈不能立刻停在 α' 的位置, 在到达稳定之前, 会做衰减的周期性运动, 衰减快慢取决于 β , 完全衰减后才会停在稳定点, 如图4的曲线1所示。这种状态称为欠阻尼状态。它的周期性振荡角频率和振荡周期分别为

$$\omega = \sqrt{1-\beta^2} \omega_0; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}}$$

偏转线圈是否工作于欠阻尼状态, 取决于阻尼因数 $\frac{P}{2\sqrt{J\theta}}$ 的值, 而 P 又与外电阻有关, 且外电阻又是可调的, 略有欠阻尼的工作状态还是允许的, 但阻尼过小就不宜使用。

欠阻尼状态的最极端状态就是检流计开路, 即 $R = \infty$ 、 $P = 0$ 、 $\beta = 0$ 、 $\omega = \omega_0$, 说明偏转线圈永远不会停在平衡位置, 而按角频率 ω_0 振荡不止, 这个频率就是可动部分的自然振荡频率, 所以使用中不能在通电后开路。

当 $\beta = 1$ 时, (式11)的特征方程有两个相等的实数根, $s_1 = s_2 = -\beta\omega_0$

此时的齐次微分方程解的形式为:

$$\begin{aligned} \gamma &= (C_1 + C_2 x) e^{-\omega_0 t} \\ \text{故 } \gamma &= (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t} \end{aligned} \quad (\text{式16})$$

C_1 、 C_2 常数同样根据初始条件求得, 即 $t = 0$ 时, $\alpha = 0$, 由(式7)得 $\gamma = -\alpha'$, 则 $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d(-\alpha')}{dt} = 0$ 。把它们代入(式16) $-\alpha' = (C_1 + C_2 \times 0) \frac{1}{e^0}$ 得 $C_1 = -\alpha'$ 再根据 $\frac{d\gamma}{dt} = C_2 e^{-\omega_0 t} + (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t} (-\omega_0)$ 得

$$0 = C_2 \frac{1}{e^0} + (C_1 + C_2 \times 0) \frac{1}{e^0} (-\omega_0)$$

$$\text{所以 } C_2 = \omega_0 C_1 = -\omega_0 \alpha'$$

$$\text{故 } \gamma = (-\alpha' - \omega_0 \alpha' t) e^{-\omega_0 t} = -\alpha' (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$$

考虑到 $\alpha = \alpha' + \gamma$ 和 $\beta = 1$, 可得非齐次微分方程的解为

$$\alpha = \alpha' - \alpha' e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t) \quad (\text{式17})$$

可见, 改变外电阻使 $\beta = 1$ 时, 振荡周期 T 趋向于无穷大, 此时没有振荡, 偏转线圈将不经过振荡, 就进入平衡位置, 而且时间最短, 这种运动状态称为临界阻尼状态, 这时的 β 值称为临界阻尼因数, 处于临界阻尼的动圈, 其运动情况如图4的曲线3所示。此状态是最理想的状态。从(式17)也可以看出, 它的解也有两部分组成, 一部分是稳定偏转, 另一部分是衰减运动, 最后趋向于零。

当 $\beta > 1$ 时, 特征方程有两个不相等的实数根, 即 $s_{1,2} = \omega_0(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})$

此时的齐次微分方程解的形式为: $\gamma = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}$, 所以有

$$\gamma = C_1 e^{(-\omega_0 \beta + \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1})t} + C_2 e^{(-\omega_0 \beta - \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1})t} \quad (\text{式18})$$

式中 C_1 、 C_2 常数同样根据初始条件求得, 即 $t = 0$ 时, $\alpha = 0$, 由(式7)得 $\gamma = -\alpha'$, 则 $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d(-\alpha')}{dt} = 0$ 。把它们代入(式18)

$$\text{得 } -\alpha' = C_1 e^{(-\omega_0 \beta + \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}) \times 0} + C_2 e^{(-\omega_0 \beta - \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}) \times 0}$$

$$C_1 + C_2 = -\alpha' \quad (\text{式19})$$

再由 $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ 得

$$0 = C_1 (-\omega_0 \beta + \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}) e^{(-\omega_0 \beta + \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1})t} + C_2 (-\omega_0 \beta - \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}) e^{(-\omega_0 \beta - \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1})t} \text{ 整理}$$

$$\text{后 } 0 = C_1 (-\omega_0 \beta + \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}) e^0 + C_2 (-\omega_0 \beta - \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}) e^0$$

$$(-\beta) (C_1 + C_2) + \sqrt{\beta^2 - 1} (C_1 - C_2) = 0$$

$$C_1 - C_2 = \frac{-\beta \alpha'}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (\text{式20})$$

联立(式19)和(式20)求得

$$C_1 = \frac{-\alpha'(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{2\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad C_2 = \frac{-\alpha'(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{2\sqrt{\beta^2 - 1}}$$

所以

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-\alpha'(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} e^{(-\omega_0 \beta + \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1})t} + \frac{-\alpha'(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} e^{(-\omega_0 \beta - \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1})t} \\ &= \frac{-\alpha'(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \frac{e^{-\beta \omega_0 t}}{2} e^{\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}} + \frac{-\alpha'(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \frac{e^{-\beta \omega_0 t}}{2} e^{-\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}} \\ &= \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left[(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) \frac{e^{\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} + (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) \frac{e^{-\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} \right] \\ &= \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left(\beta \frac{e^{\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} - \beta \frac{e^{-\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} + \sqrt{\beta^2 - 1} \frac{e^{\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} + \sqrt{\beta^2 - 1} \frac{e^{-\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} \right) \\ &= \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left[\beta \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} - \frac{e^{-\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} \right) + \sqrt{\beta^2 - 1} \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} + \frac{e^{-\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t}{2}}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

因为双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 所以上式变为

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} (\beta \sinh \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t + \sqrt{\beta^2 - 1} \cosh \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t) \\ &= \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sqrt{\beta^2 + (\sqrt{\beta^2 - 1})^2} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\beta^2 - 1}} \sinh \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{2\beta^2 - 1}} \cosh \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t \right) \\ &= \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sqrt{2\beta^2 - 1} (\cosh \phi \sinh \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t + \sinh \phi \cosh \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t) \\ &= \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sqrt{2\beta^2 - 1} \sinh(\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

其中 $\phi = \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta} = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}}$, 所以

$$\gamma = \frac{-\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sqrt{2\beta^2 - 1} \sinh(\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t + \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}})$$

考虑到 $\alpha = \alpha' + \gamma$, 可得非齐次微分方程的解为

$$\alpha = \alpha' - \frac{\alpha' e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \sqrt{2\beta^2 - 1} \sinh(\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t + \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}}) \quad (\text{式21})$$

当改变外电路电阻使 $\beta > 1$ 时, 和第二种情况一样, 可动部分将从一侧缓慢进入平衡位置, 如图4曲线中2所示, 但到达平衡位置的时间比较长, 这种情况称为过阻尼状态。此状态虽然没有振荡, 但如果 β 过大, 进入稳定时间过长, 最好也不用。

通过对检流计偏转线圈运动特性的数学分析可知, 偏转线圈

的运动状态分为欠阻尼、临界阻尼、过阻尼三种；其中过阻尼状态，偏转线圈做非周期性的衰减运动，要经过很长时间，才回到平衡位置；欠阻尼状态以平衡位置为中心做周期性的衰减运动而逐渐趋向于平衡位置；临界阻尼状态处于周期性振荡阻尼向非周期性振荡阻尼过渡的状态，以最短的时间到达平衡位置，因此使用中最好选择临界阻尼状态。

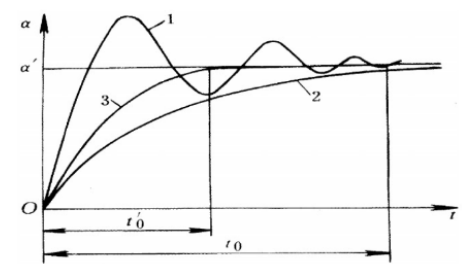


图4 偏转线圈运动状态曲线

参考文献

[1] 陈立周, 陈岚岚. 电气测量 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2022.1 月第 6 版.
[2] 黄立宏. 高等数学 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2018, 7 月第 1 版.
[3] 程春晓, 韩东峰. 冲击电流计特性研究实验中对偏转线圈运动状态的数学分析 [J]. 洛阳工业高等专科学校学报, 2007, 06 (17).