

浅谈 Desargues 定理在共点共线问题中的应用

赵燕

泰州学院数理学院, 江苏 泰州 225300

DOI:10.61369/ETI.2026010031

摘 要： 共点共线问题是《高等几何》的核心内容，也是学习难点。本文以 Desargues 定理在该类问题中的应用为主线，从课堂教学的五个环节入手，系统优化教学过程，旨在深化学生对数学本质的理解，提升其核心素养。结合具体例题，详述解题思路与分析过程，为读者提供教学启示与思维参考。

关 键 词： 高等几何；初等几何；三点共线；三线共点；Desargues 定理

A Brief Discussion on the Application of Desargues' Theorem to Concurrent and Collinear Point Problems

Zhao Yan

Department of Mathematics, Taizhou University, Taizhou, Jiangsu 225300

Abstract： Concurrent and collinear point problems constitute a core topic in Advanced Geometry and represent a significant learning challenge. This paper centers on the application of Desargues' Theorem to such problems, systematically optimizing the teaching process by addressing five key components of classroom instruction. Its primary objective is to deepen students' understanding of the essential nature of mathematics and enhance their core mathematical competencies. Through detailed exposition of concrete examples—including step-by-step solution strategies and analytical reasoning—the paper offers pedagogical insights and conceptual frameworks for both educators and learners.

Keywords： Advanced Geometry; Elementary Geometry; Collinearity of Three Points; Concurrency of Three Lines; Desargues' Theorem

《高等几何》是地方应用型本科高校数学与应用数学专业的一门重要课程。共点共线问题是其核心内容，证明方法多样，除初等几何外，还包括 Desargues 定理、Pascal 定理、Brianchon 定理、Pappus 定理，以及透视对应和配极变换等。其中，Desargues 定理形式优美、应用广泛，是学生学习的首个重要定理。该内容对接《普通高中数学课程标准》选择性必修“几何与证明”主题，有助于培养几何直观、逻辑推理与数学建模三大核心素养，为后续定理的应用奠定方法基础。

Desargues 定理包括 Desargues 正定理和 Desargues 逆定理。经过几轮教学考察发现，能正确运用 Desargues 逆定理的学生多于正定理使用者。实际上，正、逆定理的处理方式并无显著差异，关键在于学生理解的深度。Desargues 定理的教学主要存在以下难点：（1）对对偶命题认识不足。部分学生未意识到 Desargues 正、逆定理互为对偶；（2）无法准确识别三点形。部分学生所选三个顶点共线，构不成有效三点形；（3）难以快速找出一对三点形。当对应顶点用同一字母不同形式标记（如 A 和 A' 或 A_1 和 A_2 ）时，学生表现较好；而使用任意不同字母时，则耗时较长；（4）对 Desargues 构图理解不深。部分学生未能掌握其结构特征——10 个点与 10 条直线地位平等，每点过三条线，每线含三个点。

通过上述分析，为优化 Desargues 定理及其在共点共线问题中应用的教学，我们从课堂五大核心环节进行如下设计。

一、导入新课

课前布置学生动手作图，探究以下两个问题：（1）若两个三点形的对应顶点连线共点，其对应边的交点有何结论？（2）若两个三点形的对应边交点共线，其对应顶点连线有何结论？课堂开始时，引导学生回顾操作流程。部分学生在问题 1 中可能出现一组或三组对应边平行的情况，可提示其联系无穷远点与无穷远直线的概念。最后，让学生用 GeoGebra 拖动三点形，结合前两问

的直观图形，引出 Desargues 定理。以上通过提问、操作实践和 GeoGebra 动画等方式导入，快速吸引学生注意力，激发求知欲，为学习 Desargues 定理做好心理准备和铺垫。

二、新知讲授

首先对 Desargues 定理做如下几点说明：1. 三点共线与三线共点可相互转化。例如，AB, CD, EF 共点； $AB \times CD, E, F$ 共线；A, B,

$CD \times EF$ 共线； $AB \times EF$ ， C, D 共线，这四种说法等价，其中后三种属同一类型；2. Desargues 定理揭示了三线共点与三点共线之间的对应关系，因此此类问题至少有两种解法。讲解时应强调：（1）两个三点形的对应包括点与点、边与边的对应，需准确标出对应元素的位置；（2）三线共点中的“线”指两三点形对应顶点的连线，其交点为 Desargues 点（即透视中心）；三点共线中的“点”指两三点形对应边的交点，其所在直线为 Desargues 线（即透视轴）；（3）Desargues 正定理与逆定理可统一表述为：“两个对应三点形，存在 Desargues 点 $\Leftrightarrow$ 存在 Desargues 线”。由左推右为正定理，用于证三点共线；由右推左为逆定理，用于证三线共点。实际证明时可根据题意灵活选用。

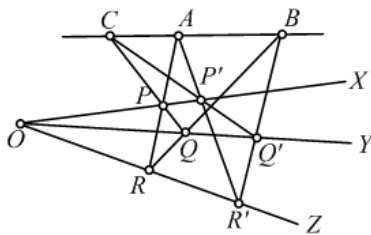


图1

接着给出 Desargues 定理在证明共点共线问题中的应用。教师通过例1引导讲解，依次给出定理的正逆证明，并板书完整解答，帮助学生掌握 Desargues 定理的解题步骤。

例1^[1] 如图1，设 OX, OY, OZ 为三条定直线， A, B 为二定点。点 R 为 OZ 上的动点，且直线 RA, RB 分别与 OX, OY 交于 P, Q 。求证： PQ 经过 AB 上的一个定点。

分析：由于 R 为 OZ 上的动点，所以在 OZ 上另取 R' ，直线 $R'A, R'B$ 分别与 OX, OY 交于 P', Q' 。

证明1 设 $PQ \times P'Q' = C$ ，将证明结论转化为 C, A, B 共线。考察三点形 PQR 与 $P'Q'R'$ ，因为 PP', QQ', RR' 共点于 O ，而 $PQ \times P'Q' = C$ ， $QR \times Q'R' = B$ ， $RP \times R'P' = A$ ，由正定理得 C, B, A 共线。

证明2 将证明结论转化为 $AB, PQ, P'Q'$ 共点。考察三点形 APP' 与 BQQ' ，其中 $AP \times BQ = R$ ， $PP' \times QQ' = O$ ， $P'A \times Q'B = R'$ ，因为 R, O, R' 共线，利用逆定理证得 $AB, PQ, P'Q'$ 共点。

注：因顶点标号特点，学生更易想到例题的第一种证法。在解题教学中，可绘制如下图表，帮助学生更清晰地理解求解过程。

证明结论	结论转化	选用定理	一对三点形	Desargues 点	Desargues 线
PQ 经过 AB 上的一个定点	$PQ \times P'Q' = C$ ， C, A, B 共线	正定理	$PQR, P'Q'R'$	PP', QQ', RR' 共点于 O	
	$AB, PQ, P'Q'$ 共点	逆定理	APP', BQQ'		$AP \times BQ = R, PP' \times QQ' = O, P'A \times Q'B = R'$ R, O, R' 共线

接着给出例2，由学生分组分别用 Desargues 逆定理和正定理尝试解答。最后教师引导学生比较例2与例1，发现二者本质相同，并体会两种方法的难易程度及选择偏好。

例2^[1] 如图2，设 A, B, C 为不共线三点， P 是过 C 的定直线上的动点， $AP \times BC = X$ ， $AC \times BP = Y$ 。求证： XY 经过定点。

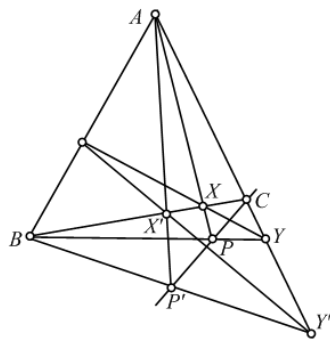


图2

通过讲解、演示与板书，结合两个实例，清晰呈现 Desargues 定理的应用，帮助学生深入理解并掌握其求解步骤，系统构建定理及其应用的完整知识体系。这一环节是课堂教学的核心，直接影响学生对 Desargues 定理的理解与掌握。

三、巩固练习

在该阶段，学生小组讨论例3，合作完成正逆定理的证明。此处阐述例3的具体思考过程，以期对读者有所启发。

例3^[1] 如图3，设 XYZ 为完全四点形 $ABCD$ 的对边三点形， XZ 分别交 AC, BD 于 L, M 。求证： YZ, BL, CM 共点。

分析1：直接证明 YZ, BL, CM 共点。将 Y 与 Z, B 与 L, C 与 M 分别视为两三点形的对应顶点。共有四种组合情形：情形1： YBC 和 ZLM ；情形2： YBM 和 ZLC ；情形3： YLC 和 ZBM ；情形4： YLM 和 ZBC 。逐一分析如下：情形1中 Z, L, M 共线，不能构成三点形，舍去；情形2中 Y, B, M 共线，无法构成三点形，舍去；情形3中 Y, L, C 共线，亦不成立，舍去；仅情形4中，三点形 YLM 与 ZBC 满足条件，且 $YL \times ZB = A$ ， $LM \times BC = X$ ， $MY \times CZ = D$ 三点共线，由 Desargues 逆定理得证。

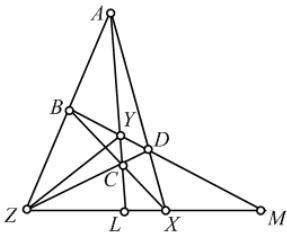


图3

注：应用逆定理的关键在于从四种可能中选出有效情形。实践中，部分学生因理解不足而中途放弃尝试；另有一些学生未验证三点形有效性，直接套用结论（如误选情形1），导致错误。若题目改为证明“ YZ, LB, MC 共点”，学生反而更容易得出正确答案。这一现象反映出学生对 Desargues 定理的理解仍停留在表

面, 缺乏深入掌握。

分析2: 设 $YZ \times BL = N$, 此题转化为证明 N, C, M 共线。此种情况下, 将 Y 与 Z 、 B 与 L 分别视为一对三点形的两个顶点, 并设第三点分别为 a 和 b 。目标是确定 a 和 b 对应的点。由于 Y 、 Z 与 B 、 L 的对应关系不明确, 存在两种可能: Y 对应 B 且 Z 对应 L , 或 Y 对应 L 且 Z 对应 B 。考虑第一种情况, 三点形为 YZa 和 BLb 。再分析 C 和 M 作为对应边交点的情形, 同样有两种可能: $Za \times Lb = C$ 且 $Ya \times Bb = M$, 或 $Za \times Lb = M$ 且 $Ya \times Bb = C$ 。综上, 共需考虑四种情形。

情形1 三点形 YZa 和 BLb , $Za \times Lb = C$, $Ya \times Bb = M$; 此时 $a = ZC \times YM = D$, $b = LC \times BM = Y$, 因为图中 Y, B, D 三点共线, 此时 YB, ZL, DY 显然共点, 此时 Y 出现在两个三点形, 该情形无意义, 舍去;

情形2 三点形 YZa 和 BLb , $Za \times Lb = M$ 且 $Ya \times Bb = C$; 此时 $a = ZM \times YC = L$, $b = LM \times BC = X$, 这时 L 出现在两个三点形, 舍去;

情形3 三点形 YZa 和 LBb , $Za \times Bb = C$, $Ya \times Lb = M$ 。此种情形中, $a = ZC \times YM$, 即为 D , $b = BC \times LM$, 即为 X 。考察三点形 YZD 和 LBX , 因为 YL, ZB, DX 共点于 A , 而 $YZ \times BL = N$, $ZD \times BX = C$, $YD \times LX = M$, 由正定理得 N, C, M 共线。

情形4 三点形 YZa 和 LBb , $Za \times Bb = M$, $Ya \times Lb = C$ 。此时 $a = ZM \times YC = L$, $b = LC \times BM = Y$, 这时 Y, L 均出现在两个三点形, 舍去。

综上, 此种合适的情形为三点形 YZD 和 LBX 。

注: (1) 设 $YZ \times CM = N$, 此题转化为证明 N, B, L 共线; 或设 $BL \times CM = N$, 此题转化为证明 N, Y, Z 共线。类似分析2, 以上两种情形可由学生自主尝试。通过梳理分类讨论情况可知, 该题共有四种可行的证明方法: 一种使用逆定理, 三种使用正定理。(2) 尽管例3的求解过程较繁琐, 部分学生可能无需此法也能快速写出一对三角形, 但该方法普遍适用于各类共点共线问题, 有助

于学生逐步理解其本质。

通过设计例3的针对性练习, 让学生在课堂上实践并及时获得指导与反馈, 可加深对 Desargues 定理的理解, 提升应用与解题能力。巩固练习是实现知识向能力转化的关键环节, 有助于培养学生转化、分类讨论及对偶等数学思想, 全面提升数学素养。

四、课堂小结

教师通过提问、讨论引导学生总结 Desargues 定理的概念及应用, 形成思维导图, 帮助梳理 Desargues 定理的知识体系。

五、作业布置

引导学生深入探究 Desargues 定理在初等几何中的应用, 内容涵盖三角形的中线、角平分线和高, 以及外心、垂心、重心和内心等相关几何元素。每个例题均通过两种不同的方法进行严谨证明。

练习1^[2] 证明三角形的三中线共点。

练习2^[3] 已知三角形 ABC 的三条角平分线分别交对边于 D, E, F , 设 BC, EF 交于 X , CA, FD 交于 Y , AB, DE 交于 Z 。试证: X, Y, Z 三点共线。

练习3^[4] 设 AD, BE, CF 分别为三角形 ABC 的边 BC, AC, AB 上的高线, 其中 $BC \times EF = X, CA \times FD = Y, AB \times DE = Z$, 求证: X, Y, Z 三点共线。

练习4^[4] 证明三角形的的外心、垂心、重心三点共线。

练习5^[5] 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, L, M, N 分别为 BC 弧的中点、 CA 弧的中点、 AB 弧的中点, 连接 NM, LM 分别交 AB, BC 于 D, E ; I 为 $\triangle ABC$ 的内心。求证: D, E, I 共线。

参考文献

- [1] 周兴和, 杨明升, 《高等几何》(第三版), 北京: 科学出版社, 2015年.
- [2] 梅向明, 刘增贤, 王汇淳等, 《高等几何》(第四版), 北京: 高等教育出版社, 2020年.
- [3] 马玉峰. 共线点与共点线问题的研究 [J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(10): 251-256.
- [4] 黄振华. 德萨格定理与共线点及共线线问题 [J]. 湖北师范学院学报 (自然科学版), 2014, 34(01): 111-114.
- [5] 赵临龙, 郭玲玲. Desargues 三角形定理及其逆定理的关系与应用 [J]. 牡丹江师范学院学报 (自然科学版), 2012, (02): 6-7.