

借助可视化工具研究球面坐标的三重积分

乔家旺, 刘宇, 付晓睿, 王琳静, 杨晓丹

航天工程大学, 北京 101416

DOI:10.61369/ECE.2025150045

摘 要 : 本文针对高等数学中三重积分球坐标变换抽象、积分限难以确定的问题, 探讨了利用 GeoGebra 软件进行可视化辅助教学的有效性。通过构建交互式三维模型, 学生可动态观察径向距离 r 、极角 φ 与方位角 θ 的变化对积分区域的影响, 直观理解变量取值范围与空间几何的对应关系。实践表明, 该方法有助于建立空间直觉, 降低认知负荷, 提升对球坐标三重积分的理解与应用能力。

关 键 词 : 三重积分; 球面坐标; 可视化工具; GeoGebra

Research on Triple Integrals in Spherical Coordinates with the Aid of Visualization Tools

Qiao Jiawang, Liu Yu, Fu Xiaorui, Wang Linjing, Yang Xiaodan

Aerospace Engineering University, Beijing 101416

Abstract : Aiming at the problems of abstract spherical coordinate transformation and difficulty in determining integral limits for triple integrals in advanced mathematics, this paper explores the effectiveness of visualization-assisted teaching using GeoGebra software. By constructing interactive 3D models, students can dynamically observe the impact of changes in radial distance r , polar angle φ , and azimuth angle θ on the integral region, and intuitively understand the corresponding relationship between variable value ranges and spatial geometry. Practice has shown that this method helps establish spatial intuition, reduce cognitive load, and improve the ability to understand and apply triple integrals in spherical coordinates.

Keywords : triple integrals; spherical coordinates; visualization tools; GeoGebra

引言

在高等数学的多元函数积分学中, 三重积分^[1]的球坐标变换因其高度抽象的几何结构和复杂的积分限确定过程, 常成为学习者理解与应用的难点。相较于柱坐标系中积分限的直观几何意义, 球坐标系下径向距离 r 极角 φ 与方位角 θ 的耦合关系^[2]使得积分区域的边界描述更为抽象, 显著增加了认知负荷。为有效降低学习者在掌握球坐标三重积分过程中的理解障碍, 引入可视化辅助工具具有重要教学价值。以 GeoGebra^[3]为例, 该软件是由国际 GeoGebra 研究所开发的开源、免费、跨平台动态数学软件, 支持三维几何建模与交互式参数调整。通过其三维绘图功能^[4], 用户可直观构建积分区域的立体模型^[5], 并实时调整球坐标参数, 动态观察积分限变化对区域形状的影响。这种可视化与交互式的学习方式, 不仅有助于学生建立球坐标系下空间区域的空间直觉, 还能促进其对积分限确定逻辑的深层理解球面坐标。

一、球面坐标

球面坐标是一种重要的三维坐标系, 它特别适用于描述具有球对称性的点、图形或物理场。与依赖三个垂直距离的直角坐标系不同, 球坐标使用一个距离和两个角度来确定点的位置, 更符合球、球壳或圆锥等几何形状的直觉。根据同济大学高等数学下册教材第八版中的描述, 若设 $M(x, y, z)$ 为球面上的一点, r 为径向距离即原点 O 与点 M 之间的距离, 极角 φ 为有向线段 $\overline{OM}$ 与 z 轴正向的夹角, 点 P 为点 M 在 xOy 面上的投影, 方位角 θ 为从 z 轴

正向来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 $\overline{OP}$ 的角。此时点的直角坐标 (r, θ, φ) 与球面坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

在利用球坐标计算三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ 时, 核心步骤之一便是依据积分区域 Ω 的几何特征, 准确确定上述三个变量 r, θ, φ 的取值范围。这一过程本质上是将复杂的空间区域“分解”为三个独立变量依次变化的规则区间, 从而将三重积分化为对

r, θ, φ 的三次累次积分。以典型例子说明：当积分区域是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的“冰激凌锥”形区域时，若直接在直角坐标系下设定积分限，不仅表达式冗长，且难以准确描述边界；而转换为球坐标后，球面方程简化为 $r=R$ ，圆锥面则对应于固定极角 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ，此时积分限可清晰地写为：

$$0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

然而，对于初学者而言，这种从几何图形到角度限的映射过程并不直观，尤其当区域边界由多个曲面拼接而成、或不关于坐标轴对称时，极易出现角度范围判断错误，例如混淆极角

φ 与方位角 θ 的作用范围，或将的取值区间误设为 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 而忽略了实际几何约束。

因此，仅依靠静态教材图示和代数推导，难以建立对三维区域在球坐标下“分层扫描”方式的动态理解。此时，借助 GeoGebra 等可视化工具^[6]，我们可通过拖动滑块实时改变 θ 、 ϕ 的值，观察对应点在空间中的轨迹，使抽象的积分限具象化为可视的空间约束^[7]。

二、使用 GeoGebra 动态展示利用球面坐标计算三重积分的设计思路

以计算半径为 R 的球面与半顶角为 α 的锥面围成的立体的体积为例，展示详细制作过程

1) 启动 GeoGebra 软件，分别打开代数区、绘图区、3D 绘图区。

2) 点击工具栏上的 ，在绘图区建立数值滑动条 R 和角度滑动条 α ，为便于观察，在出现的数值滑动条属性框中（图1），可将属性设置为整数，最小值为0，最大值16，增量是默认设置1，不用更改。相应地，将角度滑动条属性中设定最小值为 0° ，最大值设定为 180° 。

基础	滑动条	颜色	样式	位置	代数区
区间					
最小: 0°		最大: 180°			
滑动条					
☐ 固定 ☐ 随机 水平 ▼					
动画					
速度: 1		重复: ☒ 双向			
点型					
大小: 5		px			

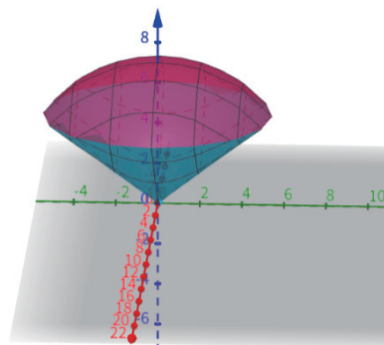
图表 1 滑动条的属性

3) 输入栏中设定 $b = \cot(\alpha)$

4) 输入球体方程: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

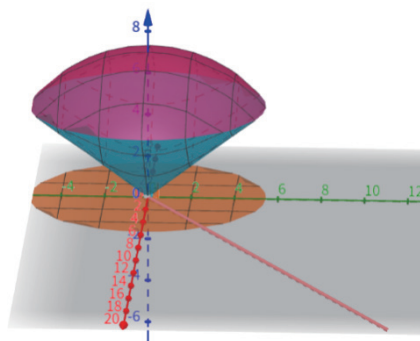
5) 建立圆锥面: 输入函数 $z = b * \sqrt{x^2 + y^2}$

$$F = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



图表 2 球面与圆锥面相交的立体

6) 设定圆锥投影方程: $d: x^2 + y^2 \leq R^2 / (b^2 + 1)$



图表 3 圆锥面的投影

7) 设定条件不等式: $f(x, y) = \text{如果}(d(x, y), b\sqrt{x^2 + y^2})$ ，该不等式规定了空间上点在 xOy 面上的投影是否在圆锥投影内。

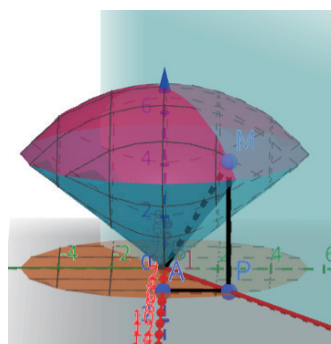
8) 设置方位角 θ 角度滑动条: 设定最小值为 0° ，最大值为 2π

9) 选定一个过原点且平行于 z 轴的平面: $-0.6x + y = 0$

确定该平面与圆锥面在第一象限的一交点 M ，然后确定该点在 xOy 面上的投影点 P 以及在 x 轴上的投影点 A 。所以得到

$$\varphi = \arcsin(AP / AM)$$

$$\theta = \arcsin(AP / OP)$$



图表 4 球面坐标示意图

由以上各点数据可得到圆锥面上每一点对应的 φ 角和 θ 角，将该点在直角坐标系下的坐标表示转化为球面坐标系下的坐标表示。

三、总结

总之，利用 GeoGebra 等可视化工具求解球面坐标三重积分，在空间想象力和思维能力培养上优势显著：它可将抽象的球面坐标积分区域（如球冠、部分球体）直观可视化，逐步提升逻辑推

理和抽象思维能力；此外，通过调整参数实时观察图形和结果变化，还能帮助举一反三，从具体题型归纳通用规律，形成“图形感知 — 逻辑分析 — 解题应用”的完整思维链条，既降低了学习门槛，又能扎实提升数学核心能力。

参考文献

-
- [1] 同济大学数学系，高等数学 [M]，第 8 版，北京：高等教育出版社，2023.
 - [2] 华东师范大学数学系. 数学分析（下册）[M]. 北京：高等教育出版社，2019: 205–228.
 - [3] 马丽霞，杨晓丹. 基于 GeoGebra 软件的常见的的抽样分布的可视化教学研究 [J]. 大众科学 .2023, 15: 31–33 页 .
 - [4] 杨晓丹，赵越，王琳静，周盛华. 基于 GeoGebra 的定积分元素法的教学研究 [J]. 高等数学研究 . 2023, 26(4): 21–23 页 .
 - [5] 王贵军，GeoGebra 与数学实验 [M]. 北京：清华大学出版社，2017.
 - [6] 赵娜，多媒体环境下定积分元素法的教法初探 [J]. 数学学习与研究，2017.
 - [7] 赵越，杨晓丹，王琳静，周盛华. GeoGebra 环境下数形结合思想教学研究 [J]. 高等数学研究 .2023, 26(4): 24–25 页