

创设 Geogebra 数学实验 突破函数极限的教学难点

王兵, 杨晓丹

航天工程大学 基础部, 北京 101416

DOI:10.61369/ECE.2025150044

摘 要 : 高等数学作为大学教育的核心课程, 不仅是数学学科的重要基石, 更是培养学生逻辑思维与抽象思维能力的关键平台。函数极限作为微积分的基础, 贯穿整个高等数学课程, 其重要性不言而喻。然而, 由于极限概念的抽象性与复杂性, 学生往往难以理解, 导致学习效果不佳。为突破这一教学难点, 本文提出一种创新策略: 利用 GeoGebra 数学实验开展可视化教学。GeoGebra 作为一款强大的动态数学软件, 能将抽象的数学概念与运算过程转化为直观的图形与动画, 帮助学生建立直观认识, 深化对抽象概念的理解。在具体教学中, 我们围绕函数极限的定义, 设计了一项基于 GeoGebra 的数学实验。通过动态展示自变量的变化趋势及极限点的逼近过程, 学生能直观感知极限的存在与性质。这种教学方式不仅激发了学生的学习兴趣, 也显著提升了他们的空间想象与逻辑思维能力。实验结果表明, 借助 GeoGebra 进行极限概念的可视化教学, 学生对函数极限的理解显著加深, 能更准确地把握其本质与运算规律。同时, 这种教学方式也培养了学生主动探索与思考的习惯, 为后续微积分学习打下坚实基础。

关 键 词 : 高等数学; Geogebra 动态教学软件; 函数极限; 可视化教学设计

Creating GeoGebra Math Experiments to Break Through the Teaching Difficulties of Function Limits

Wang Bing, Yang Xiaodan

Department of Basic Sciences, Aerospace Engineering University, Beijing 101416

Abstract : As a core course in university education, advanced mathematics is not only an important branch of mathematics but also a crucial platform for cultivating students logical and abstract thinking abilities. Among them, function limits, as the foundation of calculus, run through the entire curriculum system, and their importance is self-evident. However, due to the abstractness and complexity of the concept of limits, students often face significant difficulties in understanding, leading to poor learning outcomes. To effectively overcome this teaching difficulty, this paper proposes an innovative teaching strategy — utilizing GeoGebra mathematical experiments for visual teaching. GeoGebra, as a powerful dynamic mathematical software, can transform complex mathematical concepts and computational processes into intuitive and vivid graphics and animations, thereby helping students establish intuitive perception and deepen their understanding of abstract concepts. In specific implementation, we designed a GeoGebra-based mathematical experiment for the definition of function limits. By dynamically displaying the changing trend of independent variables and the limit behavior corresponding to the approximation process of limit points, students can intuitively perceive the existence and properties of limits at the visual level. This teaching method not only enhances students interest in learning but also significantly improves their spatial imagination and logical thinking abilities. Experimental results show that through the visual teaching of limit concepts using GeoGebra mathematical experiments, students understanding of sequence limits has significantly improved, enabling them to grasp the essence and operational rules of limits more accurately.

Keywords : advanced mathematics; geogebra dynamic teaching software; function limit; visual teaching design

作者简介:

王兵, 男, 讲师, 主要从事大学数学课程教学研究;

杨晓丹, 女, 教授, 主要从事大学数学课程教学研究。

引言

在高等教育体系中，高等数学作为一门基础且至关重要的学科，不仅是理工科学生必修的核心课程，也是培养学生逻辑思维、抽象思维及问题解决能力的关键途径。其中，函数极限作为微积分学的基石，是连接初等数学与高等数学的重要桥梁，对于学生深入理解微积分理论、掌握数学分析方法具有不可替代的作用。然而，极限概念的抽象性和理论深度往往成为学生学习道路上的“拦路虎”，导致许多学生在理解这一概念时感到力不从心，进而影响整体学习效果。

传统的极限教学方法往往侧重于理论的讲授和公式的推导，忽视了学生直观感知和动手操作的重要性。这种方式不仅难以激发学生的学习兴趣，还容易使学生在面对复杂问题时感到迷茫和挫败。因此，探索一种能够直观展示极限过程、降低理解难度的教学方法显得尤为迫切。

近年来，随着信息技术的飞速发展，可视化教学工具在数学教育领域的应用日益广泛。GeoGebra 作为其中的佼佼者，以其强大的动态演示功能和丰富的数学资源库，为数学教学提供了新的思路和方法。通过 GeoGebra，复杂的数学概念和运算过程可以被转化为生动直观的图形、动画和交互式模型，使学生在视觉和触觉上同时获得丰富的感知体验，从而加深对抽象概念的理解。

基于上述背景，本文旨在探讨如何利用 GeoGebra 数学实验进行极限概念的可视化教学。通过设计一系列基于 GeoGebra 的数学实验，本文期望能够为学生提供一种全新的学习方式，帮助他们突破极限学习的瓶颈，提高学习效果。同时，本文也希望通过这一研究，为高等数学教学的创新与发展贡献一份力量，推动数学教育与信息技术的深度融合。

一、函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内是有定义的。如果存在常数 A ，对于任意给定的正数 ε （不论它多么小），总存在正数 δ ，使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ （当 $x \rightarrow x_0$ ）。可以简单地表述为：

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

二、重塑极限概念教学的二大关键点与 GeoGebra 的融合策略

在深入探讨函数在有限点处极限的定义时，我们必须精准把握以下三个核心方面，并结合现代信息技术工具 GeoGebra，通过可视化教学来降低理解难度，增强学生掌握这一关键数学概念的能力。

极限的独立性与函数值的无关性：首先明确，某点处是否存在极限，与该点函数是否有定义或定义的具体值并无直接关联。这一抽象概念在传统教学中往往难以直观展现。通过 GeoGebra，我们可以设计动态实验，让学生观察函数图像在目标点附近的行为，而不管该点是否“跳跃”或“空洞”。例如，展示一个函数如

$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ ，即在点 $x = 2$ 无定义，观察自变量接近 $x = 2$ 时函数值是否接近某一个确定的常数。

双侧趋近性与极限的统一性：极限定义要求从目标点的左右两侧同时趋近，且两侧趋近的极限值必须相同。利用 GeoGebra 的动画功能，可以制作一个滑块控制自变量逐渐靠近目标点，同

时展示左侧和右侧函数值的变化轨迹，直至两者趋于一致，从而直观展示“双侧趋近”的概念。这种可视化手段有助于学生理解为什么需要同时考虑左右两侧的情况，以及为什么两者必须相等才能定义极限。

综上所述，通过 GeoGebra 数学实验进行极限概念的可视化教学，不仅能够直观展示极限过程中的关键要素和动态变化，还能有效促进学生主动探索和深入理解。这种方法不仅降低了抽象概念的学习门槛，还激发了学生的学习兴趣 and 积极性，为高等数学教学的创新与发展提供了新的视角和动力。

三、用 GeoGebra 动态展示详细制作过程

1) 启动 GeoGebra 软件，分别打开绘图区、代数区。

2) 点击工具栏上的 ，在绘图区建立滑动条，在出现的滑动条属性框中（图1），

说明：用于控制自变量与 $x=2$ 的接近程度。

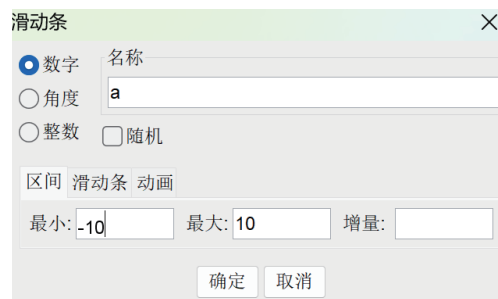


图1 滑动条的属性

3) 英文状态下，在指令栏中输入： $y = (x^3 - 2x^2) / (x - 2)$

说明：绘制函数。

4) 英文状态下，在指令栏中输入：

$A=(2,4)$

说明：绘制函数点 $(2,4)$ 并调整设置颜色，突出显示函数在这一点无定义。

5) 在指令栏中  依次输入： $B=(2+a,0)$ ， $C=(2-a,0)$ ， $B_1=(2+a,(2+a)^2)$ ， $C_1=(2-a,(2-a)^2)$

说明：每输入一个命令回车再输入下一个命令，这样依次生成了四个点，其中点 B 、 C 在左右两侧，且距离相等， B_1 、 C_1 在曲线上，分别对应点 $x+a$ 与 $x-a$ 的函数值。

6) 在指令栏中  依次输入：线段 (B, B_1) ，线段 (C, C_1)

说明：每输入一个命令回车再输入下一个命令，这样依次生成了两条线段，并通过属性调整线段的颜色和粗细便于实验观察（图2）。

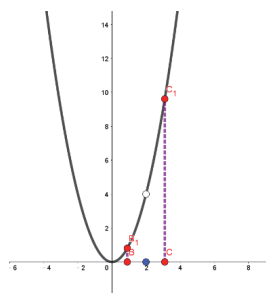


图2 点及函数值

上述设置为演示提供了基础框架，通过使用滑动条来动态调整参数 a ，我们可以观察到当自变量变化时函数值如何随之变化（如图3所示），这有助于加深对函数在有限点处极限定义的理解。通过这种互动式的可视化方法，学生可以直观地看到函数值如何随着自变量的逼近而趋近于某个特定的极限值，从而更清晰地理解极限的概念。这种动态观察不仅使学习过程更加生动有趣，而且有助于学生建立起对极限概念的直观认识，这对于他们掌握微积分的基础至关重要。

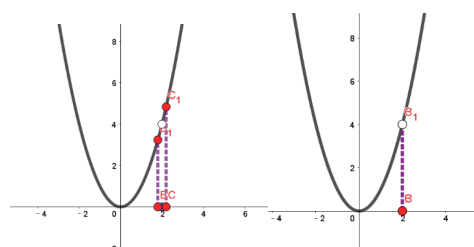


图3 自变量接近 $x=2$ 时函数值的变化

四、总结

高等数学作为一门基础而重要的学科，其抽象性和复杂性常常使得学生在学习过程中面临诸多挑战。传统的教学方法往往难以直观地展现数学概念的动态变化过程，限制了学生对知识的深入理解和灵活应用。然而，通过将GeoGebra等可视化工具融入高等数学教学中，我们成功地打破了这一局限，为数学教学注入了新的活力。在极限概念的教学实践中，GeoGebra的滑动条、跟踪工具和动画功能被充分利用，使得原本抽象的极限定义变得生动具体。学生们能够亲眼目睹随着自变量逐渐接近某一特殊点，函数值如何表现出特定的变化趋势，并深刻理解到极限的独立性、双侧趋近性。这种直观、动态的学习方式不仅极大地降低了学习难度，还极大地激发了学生的学习兴趣和积极性。

此外，GeoGebra的应用还促进了教学方式的创新。通过创设丰富的数学实验，教师能够引导学生在实践中发现问题、解决问题，从而培养学生的探究精神和创新能力。同时，这种教学模式也更加注重学生的主体性和参与性，使学生从被动接受知识转变为主动探索知识，提高了教学效果和学习质量。

展望未来，随着信息技术的不断发展和教育理念的不断更新，我们坚信可视化教学将在教育领域发挥越来越大的作用。GeoGebra等可视化工具将成为数学教学的重要辅助手段，帮助教师更好地突破教学难点，提升教学质量。同时，我们也期待更多教师能够积极探索和实践新的教学方法，将可视化教学与传统教学相结合，为学生创造更加优质、高效的数学学习环境。

参考文献

- [1] 同济大学数学系，高等数学[M]，第8版，北京：高等教育出版社，2023.
- [2] 赵越，杨晓丹，王琳静，周盛华. GeoGebra环境下数形结合思想教学研究[J]. 高等数学研究. 2023, 26(4): 24-25.
- [3] 杨晓丹，赵越，王琳静，周盛华. 柱壳法求旋转体体积的可视化教学[J]. 电脑编程技巧与维护. 2023, 459: 156-158.
- [4] 杨晓丹，赵越，王琳静，周盛华. 基于GeoGebra软件的螺旋线的可视化教学研究[J]. 数字化用户. 2023, 29(24): 293-295.
- [5] 马丽霞，杨晓丹. 基于GeoGebra软件的常见的的抽样分布的可视化教学研究[J]. 大众科学. 2023, 15: 31-33.
- [6] 杨晓丹，赵越，王琳静，等. 基于GeoGebra的定积分元素法的教学研究[J]. 高等数学研究. 2023, 26(04): 21-23.
- [7] 王贵军，GeoGebra与数学实验[M]，北京：清华大学出版社，2017.
- [8] 赵娜. 多媒体环境下定积分元素法的教法初探，数学学习与研究，2017.
- [9] 唐耀宗，殷芳，杜刚. 基于多模态表征与认知负荷理论的数学分析可视化教学案例设计与实践探索[J]. Advances in Education, 2025, 15. DOI:10.12677/ae.2025.155840.
- [10] 唐耀宗，殷芳，杜刚. 基于多模态表征与认知负荷理论的数学分析可视化教学案例设计与实践探索[J]. 教育进展，2025, 15(5): 831-840. DOI:10.12677/ae.2025.155840.