

非赫兹接触下 Kalker 理论的非线性修正模型

李阔, 刘伟渭, 鲁鹏, 李加伟

西南交通大学机械工程学院, 四川 成都 610031

DOI:10.61369/ERA.2026020018

摘要 : 轮轨接触建模的准确性直接影响轨道车辆动力学仿真可靠性。传统 Kalker 线性理论在中高蠕滑率条件下存在切应力分布描述失真及力饱和效应缺失的问题, 导致预测偏差。为此, 本文提出一种融合非赫兹接触几何与非线性修正机制的切向接触模型: 基于 Kalker 线性理论推导非椭圆接触斑的切向力表达式, 引入椭圆牵引边界划分黏着区与滑动区, 结合 Vermeulen–Johnson 模型与 Shen–Hedrick–Elkins 理论构建蠕滑力非线性折减机制。仿真结果表明: 在横移量 $-6\text{mm} \sim 6\text{mm}$ 、摇头角 $-0.03 \sim 0.03\text{rad}$ 工况下, 模型计算的纵向切向力相对误差 $< 15\%$ 、横向误差 $< 10\%$, 较 Kalker 变分法模型 (KVM) 效率提升 28.7% , 实现了中高蠕滑率工况下“高精度预测”与“高效计算”的工程需求, 为多体动力学仿真提供了可靠的理论支撑, 适用于轨道车辆多体动力学中的高效切向接触建模。

关键词 : 轮轨接触; Kalker 线性理论; 非赫兹接触; 非线性修正; 椭圆牵引边界

A Nonlinear Modified Model of Kalker's Theory under Non-Hertzian Contact Conditions

Li Kuo, Liu Weiwei, Lu Peng, Li Jiawei

School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031

Abstract : The accuracy of wheel–rail contact modeling directly affects the reliability of railway vehicle dynamics simulation. The traditional Kalker linear theory suffers from distorted descriptions of shear stress distribution and lack of force saturation effect under medium to high creepage conditions, leading to prediction deviations. To address this, a tangential contact model integrating non–Hertzian contact geometry and nonlinear correction mechanisms is proposed. Based on the Kalker linear theory, the model deduces the tangential force expression for non–elliptical contact patches, introduces an elliptical traction boundary to divide the contact area into stick and slip zones, and constructs a nonlinear creep force reduction mechanism by combining the Vermeulen–Johnson model and Shen–Hedrick–Elkins theory. Simulation results show that under the conditions of lateral displacement from -6 mm to 6 mm and yaw angle from -0.03 to 0.03 rad , the relative error of the longitudinal tangential force calculated by the model is less than 15% , the transverse error is less than 10% , and the efficiency is improved by 28.7% compared with the Kalker variational method model (KVM). This model achieves the engineering requirements of "high–precision prediction" and "efficient calculation" under medium to high creepage conditions, providing reliable theoretical support for multibody dynamics simulation and being suitable for efficient tangential contact modeling in railway vehicle multibody dynamics.

Keywords : wheel–rail contact; Kalker linear theory; non–Hertzian contact; nonlinear correction; elliptical traction boundary

引言

轮轨接触计算是轨道车辆动力学仿真中的关键步骤, 轮轨接触模型显著影响动力学仿真结果的准确性、效率和鲁棒性。

轮轨接触斑内蠕滑力、蠕滑率的大小以及黏着区的分布是磨损分析计算中的重要参数, 它们共同影响轮轨磨损的发展, 因此轮轨接触问题是车轮磨损研究中的关键问题, 需要有效且准确的轮轨接触模型用来分析轮轨间的相互作用。法向接触最具代表性的就是 Hertz^[1] 的赫兹理论, 切向接触最具代表性的就是 Kalker^[2] 提出的 kalker 简化理论及其 FASTSIM 算法。

随着众多学者的深入研究, 发现在实际的轮轨接触中, 赫兹理论假设两个接触固体在接触区域内的曲率为常数, 这一假设是有问题

的^[3]。赫兹接触模型忽略了接触斑内轮轨曲率变化，会带来特定的计算误差^[4]。关于非赫兹接触模型的研究，有很多学者在赫兹理论的基础上不断改进，开发了诸多非赫兹接触模型，例如 Johnson-Vermeulen 三维滚动接触理论^[5]、kalker 线性蠕滑理论^[6]、沈氏理论^[7]等。Kik 和 Piotrowski 提出了“虚拟渗透”的概念，假设压应力沿横向的变化与接触斑纵向边界的分布保持一致，该模型可快速地确定接触斑形状^[8]。安博洋^[9]提出了一种求解法向接触的非赫兹型快速计算方法及其数值程序 INFCON，并采用 Fastrisp 和 Ayasse-Chollet 的局部椭圆法处理切向接触问题。Sichani M^[10]提出了一种新的轮轨接触模型，切向接触问题采用基于条带理论的 FASTSIM 替代方法进行处理，该方法将轮轨的二维接触推广到三维接触。KP 模型以及 STRIPES 模型采用的是以非椭圆适应方法改进后的 FASTSIM 程序，而 ANALYN 模型采用的是新提出的 Fastrisp 算法^[11]。

为改进 Kalker 线性理论在非赫兹接触条件下的适用性，本文提出了一种面向轮轨切向接触问题的修正模型。该模型基于非椭圆接触斑的几何特性与蠕滑率分布，推导出线性切向力的积分表达式；通过引入椭圆牵引边界，将接触区域划分为黏着区与滑动区，并在此基础上对切应力分布进行非线性修正。进一步地，模型结合 Vermeulen-Johnson 模型与 Shen-Hedrick-Elkins 理论中的蠕滑折减策略，对 Kalker 线性力结果进行非线性修正，构建出更贴近实际工况的蠕滑力表达式。最后，通过标准轮轨型面的多工况仿真验证了该模型在不同横移与摇头角条件下的预测准确性与鲁棒性，为轨道车辆动力学中的高效切向接触建模提供了理论支持与数值基础。

一、基于 kalker 线性理论的轮轨切向接触

在 Kalker 线性理论中，当轮轨之间的蠕滑率足够小时，接触区域内的相对滑动较小，材料处于弹性状态，因而整个接触斑可被视为完全黏着区。在这种情况下，接触面上的微动主要由剪切变形产生，切向力与蠕滑率之间呈现出严格的线性关系。这种线性蠕滑理论在力学上建立了切向力与三个蠕滑率分量（纵向、横向、自旋）之间的线性映射关系，并通过蠕滑系数矩阵加以描述。如果接触区域是椭圆，则应用 kalker 线性蠕变理论来描述这种线性关系

$$\begin{aligned} F_x &= -G(ab)C_{11}\xi_x \\ F_y &= -G(ab)C_{22}\xi_y - G(ab)^{3/2}C_{23}\xi_\phi \end{aligned} \quad (1)$$

其中 C_{ij} 是 Kalker 蠕滑系数，它依赖于轮轨接触斑的半轴长度之比。

对于非赫兹条件下的非椭圆接触斑，考虑到纵向切向力由于 x 轴不对称导致接触斑引起自旋，产生相应的纵向切向力，则扩展的 kalker 线性理论可写成^[4]

$$\begin{cases} F_x = -f_{11}\xi_x - f_{13}\xi_\phi \\ F_y = -f_{22}\xi_y - f_{23}\xi_\phi \end{cases} \quad (2)$$

F_x 和 F_y 为纵向和横向切向力， f_{11} 、 f_{13} 、 f_{22} 和 f_{23} 为切向力与蠕滑率之间的线性系数。

根据文献^[5]内容，非赫兹接触的 kalker 线性蠕滑系数可由下式的极限值求得：

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\lim_{\xi_x \rightarrow 0} \frac{F_x}{\xi_x}, \text{ with } \xi_y = 0, \xi_\phi = 0 \\ f_{13} &= -\lim_{\xi_\phi \rightarrow 0} \frac{F_x}{\xi_\phi}, \text{ with } \xi_x = 0, \xi_y = 0 \\ f_{22} &= -\lim_{\xi_y \rightarrow 0} \frac{F_y}{\xi_y}, \text{ with } \xi_x = 0, \xi_\phi = 0 \\ f_{23} &= -\lim_{\xi_\phi \rightarrow 0} \frac{F_y}{\xi_\phi}, \text{ with } \xi_x = 0, \xi_y = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

则 kalker 线性蠕变系数可以表示为：

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\int_{y_1}^{y_2} \int_{-x_1}^{x_1} (x - L_x(y)) / L_x(y) dx dy = 2 \int_{y_1}^{y_2} L_x^2(y) / L_x(y) dy = \frac{3G}{4} \int_{y_1}^{y_2} \frac{L_x^2(y) C_{11}(y)}{a(y)} dy \\ f_{13} &= -\int_{y_1}^{y_2} \int_{-x_1}^{x_1} y(x - L_x(y)) / L_x(y) dx dy = 2 \int_{y_1}^{y_2} L_x^2(y) y / L_x(y) dy = \frac{8G}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{L_x^2(y) C_{23}(y) y}{a(y) \sqrt{a(y)/b(y)}} dy \end{aligned} \quad (4-a)$$

$$\begin{aligned} f_{22} &= -\int_{y_1}^{y_2} \int_{-x_1}^{x_1} (x - L_x(y)) / L_y(y) dx dy = 2 \int_{y_1}^{y_2} L_y^2(y) / L_y(y) dy = \frac{3G}{4} \int_{y_1}^{y_2} \frac{L_y^2(y) C_{22}(y)}{a(y)} dy \\ f_{23} &= -\frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{-x_1}^{x_1} (x^2 - L_x^2(y)) / L_y(y) dx dy = \frac{2}{3} \int_{y_1}^{y_2} L_y^3(y) / L_y(y) dy = \frac{8G}{3\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{L_y^3(y) C_{23}(y)}{a(y) \sqrt{a(y)/b(y)}} dy \end{aligned} \quad (4-b)$$

KVM 接触模型和本文非赫兹模型计算的线性蠕变系数在下图 1 中进行了比较。从图 1 中可以看出本文非赫兹接触模型计算的线性蠕变系数与 KVM 的计算的结果在总体上具有一致性。图中 f_{11} 和 f_{22} 相对于 f_{13} 和 f_{23} 偏差较大，但是整体的趋势和 KVM 是一致的，总体而言，本文非赫兹接触模型计算线性蠕变系数是具有良好的计算精度。

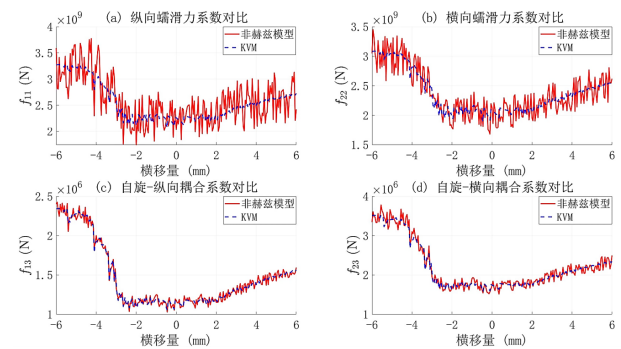


图 1 线性蠕变系数对比

Fig.1 Comparison of linear creep coefficients

于是

$$\begin{cases} F_x = -f_{11}\xi_x - f_{13}\xi_\phi \\ F_y = -f_{22}\xi_y - f_{23}\xi_\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{3GC_{11}\xi_x}{4a} \int_{y_1}^{y_2} L_x^2(y) dy - \frac{8GC_{23}\xi_\phi}{\pi a \sqrt{a/b}} \int_{y_1}^{y_2} L_x^2(y) y dy \\ F_y = -\frac{3GC_{22}\xi_y}{4a} \int_{y_1}^{y_2} L_y^2(y) dy - \frac{8GC_{23}\xi_\phi}{3\pi a \sqrt{a/b}} \int_{y_1}^{y_2} L_y^3(y) dy \end{cases} \quad (5)$$

$L_x(y)$ 为接触区域前后边缘之间的距离； $y_{l,r}$ 表示接触斑的左右边缘； C_{ij} 表示蠕滑系数； a, b 表示接触斑半轴长度和宽度； G 表示剪切模量。

轮轨接触运动学计算是求解轮轨刚性滑动分布或蠕滑率的过程，是计算轮轨切向问题的前提步骤。考虑曲线接触区域的影响

响, 给出了接触区域内的轮轨刚性滑移分布^[12]:

$$\begin{cases} w_x(y) = \xi_x - (y - y_c) \cdot \xi_\phi + \frac{\omega_{xy} \Delta z_{wr}(y)}{v_0} \\ w_y(x) = \xi_y + (x - x_c) \cdot \xi_\phi \end{cases} \quad (6)$$

其中 ξ_x 、 ξ_y 和 ξ_ϕ 分别为初始接触点处的纵向蠕滑率、横向蠕滑率和自旋蠕滑率, ω_{xy} 为轮对绕 y 轴的角速度, v_0 为轮对的移动速度。轮轨在接触区内的弹性变形相同时, $\Delta z_{wr}(y)$ 为考虑轮轨型面变形的法向距离, 通过接触极限法迭代求解, 避免初始接触点曲率突变导致的计算误差^[13]。

由于采用沿纵向变化的轮轨刚性滑移 $w_x(y)$, 上式 F_x 中旋量 ξ_ϕ 引起的纵向切向力反映在 $w_x(y)$ 分布的影响上。不同横向条纹的切向力分布 $p_x(y)$, 即为纵向力 F_x 的微分, 可以写成如下:

$$p_x(y) = \frac{dF_x}{dy} = -\frac{3GC_{11}l_a^2(y)}{4a} w_x(y) \quad (7)$$

对接触区域内的切向力分布 $p_x(y)$ 进行积分, 可得接触斑内的纵向切向力为:

$$\begin{aligned} F_x' &= \int_{y_l}^{y_r} p_x(y) dy \\ &= -\frac{3GC_{11}}{4a} \int_{y_l}^{y_r} l_a^2(y) w_x(y) dy \end{aligned} \quad (8)$$

接触斑内的横向切向力可以表达为:

$$\begin{aligned} F_y' &= -\frac{3GC_{22}\xi_y}{4a} \int_{y_l}^{y_r} l_a^2(y) dy \\ &\quad - \frac{8GC_{23}\xi_\phi}{3\pi a\sqrt{a/b}} \int_{y_l}^{y_r} l_a^3(y) dy \end{aligned} \quad (9)$$

由此, 建立了修正的 kalker 线性理论。

但是在犬蠕滑或磨损型面下, 切应力在黏着区线性增长, 且滑动区边界为抛物线^[14], 这与实际非赫兹接触的椭圆应力分布存在较大的偏差。

通过引入椭圆牵引边界、Johanson 模型和沈氏理论中的非线性修正策略对 F_x' 和 F_y' 进行非线性修正, 确保黏着区切应力非线性增长; 滑动区切应力严格满足椭圆边界, 更贴合实际接触应力分布^[15]。

F_x' 和 F_y' 代表接触斑内的纵向切向力和横向切向力, 接触斑内某点 (x, y) 的纵向切向应力 $q_x(x, y)$ 和横向切向应力 $q_y(x, y)$, 二者关系如下:

$$\begin{aligned} F_x' &= \iint_{Ptachi} q_x(x, y) dx dy \\ F_y' &= \iint_{Ptachi} q_y(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

积分范围是接触斑内的所有点 (x, y) 。

可得纵向切向应力 $q_x(x, y)$ 和横向切向应力 $q_y(x, y)$ 如下:

$$\begin{aligned} q_x(x, y) &= -\frac{3GC_{11}}{4a} l_a^2(y) w_x(y) \\ q_y(x, y) &= -\frac{3GC_{22}\xi_y}{4a} l_a^2(y) \\ &\quad - \frac{8GC_{23}\xi_\phi}{3\pi a\sqrt{a/b}} l_a^3(y) \end{aligned} \quad (11)$$

引入椭圆牵引边界, 椭圆牵引边界表示滑动区内切应力的极限值, 由摩擦系数和法向力决定, 定义为:

$$g_e(x, y) = u_{eff} p(x, y) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (12)$$

动态摩擦系数:

$$u_{eff} = \begin{cases} 1.2f, & (\text{牵引工况}, \xi_x > 0) \\ f, & (\text{制动/自由滚动}) \end{cases} \quad (13)$$

接触斑内法向压力分布:

$$p(x, y) = \frac{N}{\pi ab} \quad (\text{均匀分布假设}) \quad (14)$$

判断黏着区与滑动区

对接触斑内每一点 (x, y) :

总切应力幅值:

$$|q(x, y)| = \sqrt{q_x^2(x, y) + q_y^2(x, y)} \quad (15)$$

摩擦极限: $g_e(x, y)$ (椭圆边界)

判定条件: 若 $|q(x, y)| \geq g_e(x, y)$ 则为滑动区, 否则为黏着区。

滑动区修正

令切应力幅值等于椭圆边界, 方向不变:

$$\begin{aligned} q_x^{corr}(x, y) &= \frac{q_x(x, y)}{|q(x, y)|} \cdot g_e(x, y) \\ q_y^{corr}(x, y) &= \frac{q_y(x, y)}{|q(x, y)|} \cdot g_e(x, y) \end{aligned} \quad (16)$$

黏着区修正

保持切应力方向, 引入非线性增长:

$$\begin{aligned} \Delta q(x, y) &= g_e(x, y) - |q(x, y)| \\ q_x^{corr}(x, y) &= q_x(x, y) \left[1 + \frac{\Delta q(x, y)}{g_e(x, y)} \right] \\ q_y^{corr}(x, y) &= q_y(x, y) \left[1 + \frac{\Delta q(x, y)}{g_e(x, y)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

对修正后的切应力分布积分:

$$\begin{aligned} F_x^{corr} &= \iint_{Ptachi} q_x^{corr}(x, y) dx dy \\ F_y^{corr} &= \iint_{Ptachi} q_y^{corr}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

采用 Vermeulen-Johanson 模型和沈氏理论中的非线性修正策略得到适用于犬蠕滑的切线模型^[12]。根据 V-J 模型和沈氏理论, 考虑 V-J 理论中蠕滑力线性表达式和 kalker 线性理论的表达式, 令二者所表达的切向力相等, 有

$$\begin{aligned} 3fN\xi_1^* &= -abGC_{11}\xi_x \\ 3fN\xi_2^* &= -abGC_{11}\xi_\eta - G(ab)^{1.5}C_{23}\xi_\phi \end{aligned} \quad (19)$$

显然，正则化后的刚性蠕滑率 ξ_i^* 中包含了自旋蠕滑率 ξ_ϕ 。将总的刚性蠕滑率进行正则化处理：

$$\xi^* = (\xi_1^{*2} + \xi_2^{*2})^{0.5} = \frac{1}{3fN} (F_x^{corr2} + F_y^{corr2})^{0.5} = \frac{F_R}{3fN} \quad (20)$$

其中， $F_R = \sqrt{F_x^{corr2} + F_y^{corr2}}$ 。

由 V-J 非线性模型的蠕滑率饱和式得：

$$F_i' = \begin{cases} \frac{\xi_i^*}{\xi^*} fN [1 - (1 - \xi_x^*)^3], \xi^* \leq 1 \\ \frac{\xi_i^*}{\xi^*} fN, \xi^* > 1 \end{cases} \quad (21)$$

式中， $i=1,2$ 。记 $F_R' = \sqrt{F_1'^2 + F_2'^2}$ ，有：

$$F_R' = \begin{cases} fN [1 - (1 - \xi^*)^3], \xi^* \leq 1 \\ fN, \xi^* > 1 \end{cases} \quad (22)$$

将式子(20)带入式子(22)可得：

$$F_R' = \begin{cases} fN \left[\frac{F_R}{fN} - \frac{1}{3} \left(\frac{F_R}{fN} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{F_R}{fN} \right)^3 \right], F_R \leq 3fN \\ fN, F_R > 3fN \end{cases} \quad (23)$$

其中， f 为轮轨间的摩擦系数。

定义缩减因子 $\varepsilon = \frac{F_R'}{F_R}$ ，则得到最终的蠕滑力：

$$\begin{aligned} F_{xNL} &= \varepsilon \cdot F_x^{corr} \\ F_{yNL} &= \varepsilon \cdot F_y^{corr} \end{aligned} \quad (24)$$

缩减因子 ε 依赖法向力 N 和摩擦系数 f ，其中 N 由非赫兹接触的等效椭圆法求解，实现大蠕滑下切向力饱和效应与法向曲率的联动修正。当切应力超过摩擦极限时，需重新划分黏着区与滑动区边界，并基于新的接触区分布迭代更新等效椭圆参数，直至切向力计算结果收敛，该迭代过程可确保非赫兹接触的曲率变化与切向力饱和效应的动态耦合，避免传统线性理论的预测偏差。

二、非赫兹接触求解

(一) 接触几何

轮轨接触几何关系的计算是根据轮轨之间的相对运动关系求解轮轨法向距离和接触面积的过程^[16,17]。文献^[18,19]通过多体形式主义与接触迹法法的结合，实现了轮轨接触几何处理的自动化与泛化，为复杂场景下的接触分析提供了高效解决方案。轮轨接触几何计算示意图如图2所示。图2中，O-YZ为绝对坐标系，车辆-轨道动力学系统建立在绝对坐标系下；O-yz为轮轨接触坐标系。轮轨法向和切向接触问题的计算都是在轮轨接触坐标系下建立的。

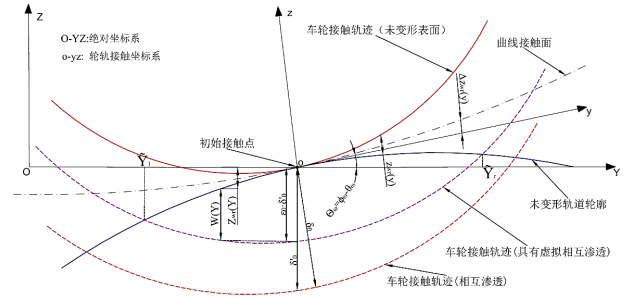


图2 轮轨接触几何计算示意图

Fig.2 Calculation diagram of wheel-rail contact geometry

为了降低轮轨初始接触点对接触角的敏感性，采用一种可以考虑接触区局部接触角影响的加权策略^[12]。然后在接触面积和接触角的求解过程中，可得出

$$l_a(y) = \sqrt{2R_{wx}(y) \cdot \left[\frac{0.5L_0}{\beta W_0} \delta_0 - z_{wr}(y) \right]}, y_l \leq y \leq y_r \quad (25)$$

其中 $R_{wx}(y)$ 表示轮对的滚动半径， L_0 和 W_0 分别为区域 C_1 的纵向尺寸和横向尺寸， β 是由 L_0/W_0 的值决定的参数^[4]。

$$\ddot{A}z_{wr}(x, y) = \frac{z_w(x, y) + z_r(x, y)}{2} - \frac{z_w'(x, y) + z_r'(x, y)}{2} \quad (26)$$

该式子表示轮轨型面有无变形时实际的轮轨接触曲线，表示轮轨法向距离。 $z_{wr}'(x, y)$ 和 $z_{wr}(x, y)$ 表示轮轨型面有无变形时的 Z 坐标。

(二) 法向接触

KP 模型是在赫兹理论的基础上进行了改进，是基于虚拟渗透法的快速接触计算模型。首先基于虚拟贯彻 (VP) 区域估算轮轨非赫兹的接触区域，并计算非赫兹接触区域的等效椭圆；然后以等效椭圆接触斑为输入，求解轮轨之间的法向问题。如图3所示为虚拟渗透方法示意图。

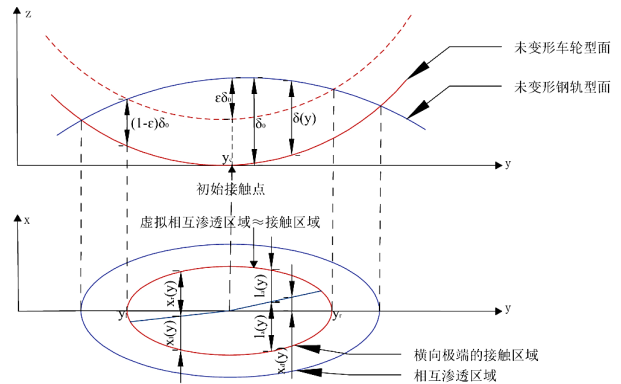


图3 虚拟渗透法示意图 (基于 VP 的非赫兹模型—KP 模型)

Fig.3 Schematic diagram of virtual penetration method (VP-based non-Hertz model-KP model)

在 KP 模型中，基于两个原则将非椭圆接触片等效为一个椭圆：

等效椭圆的面积与原接触区域的面积相同；

$$\int_{y_l}^{y_r} l_a(y) dy = \int_{y_l}^{y_r} a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy = \pi ab \quad (27)$$

等效椭圆的纵向半轴与横向半轴的比值与原非椭圆接触区域的长度与宽度的比值相同。

$$\frac{y_r - y_l}{l_a(y_c)} = \frac{b}{a} \quad (28)$$

然后可以得到等效椭圆的半轴为：

$$a = \sqrt{\frac{4l_a(x_c) \int_{y_r}^{y_l} l_a(y) dy}{\pi(y_r - y_l)}} \quad (29)$$

$$b = \sqrt{\frac{4(y_r - y_l) \int_{y_r}^{y_l} l_a(y) dy}{\pi l_a(x_c)}}$$

根据文献^[3]等效椭圆法（第一矩阵法），估计的非椭圆接触区域接触边界的一阶矩等于等效椭圆的一阶矩（等效椭圆质心等于实际接触区质心）。

$$\int_C x \cdot dA = \int_{C_e} x \cdot dA \quad (30)$$

$$\int_C y \cdot dA = \int_{C_e} y \cdot dA$$

其中为 C 原始接触区， C_e 为等效椭圆。

那么根据式（30），等效椭圆半轴可以表示为

$$a = \frac{3\pi \int_{y_r}^{y_l} l_a^2(y) dy}{4 \int_{y_r}^{y_l} l_a(y) dy} \quad (31)$$

$$b = \frac{4 \left(\int_{y_r}^{y_l} l_a(y) dy \right)^2}{3\pi \int_{y_r}^{y_l} l_a^2(y) dy}$$

求得的等效椭圆半轴可以作为切向接触模型的输入进而求解切向力。

作为一种修正的计算过程，将等效椭圆作为已知的接触区域，利用赫兹理论求解轮轨法向力，接触区域内法向应力的分布假设为以下形式：

$$N = \frac{2\pi G(1+\mu) \max(a,b) \delta_0}{3(1-\mu^2) K(e)} \quad (32)$$

其中 G 和 μ 分别为轮轨材料的剪切模量和泊松比。 $K(e)$ 是参数 e 的第一类完全椭圆积分参数 e 可以表示为

$$e = \sqrt{1 - [\min(a/b, b/a)]^2} \quad (33)$$

通过改进轮轨接触角 θ_w ，轮轨刚性滑移 $w(x,y)$ ，VP 区域折减系数 ε 和椭圆等效方法，最终建立了与接触区域横向极值 $y_{l,r}$ 和初始接触点无关的非赫兹接触模型，解决了输入量不连续导致的计算鲁棒性问题^[12]。

三、结果

将所提出的轮轨接触模型应用于轮轨的滚动接触中。为了验证所提出的接触模型的准确性与可靠性，本文利用模型对不

同轮对横移量和摇头在直线上运行的接触问题进行了仿真。本文参考模型是 kalker 变分法接触模型 (KVM)，在模型验证中，钢轨为标准 CNH60 钢轨，车轮为中国高速 LMA 型踏面磨损车轮，如下图 4 所示为车轮和钢轨的型面叠加图。轮轨剪切模量 $G=210e9Pa$ ，泊松比 $\mu=0.28$ ，轮轨摩擦系数 $f=0.4$ 。轮轨横移量的范围为 $-6mm \sim 6mm$ ，步长为 $0.05mm$ ，轮对横摆角范围为 $-0.03 \sim 0.03rad/mm$ ，步长为 $0.01rad$ 。在计算中，只考虑轮对的滚动速度，忽略轮对的其他速度。

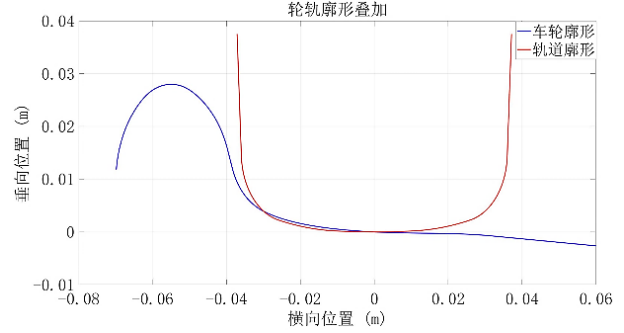


图4 型面叠加图

Fig.4 Type surface overlay diagram

为了验证所提出的非赫兹接触模型在轮轨接触中的正确性，本文利用该模型对不同轮对横移量和摇头角的轮轨在直线上运行的接触问题进行了仿真，本文参考模型是 KVM 模型，KVM 模型是 kalker 变分法模型的简称，其理论核心是通过变分法原理建立轮轨接触力学关系，涵盖线性与非线性场景，是目前使用最普遍、最准确的模型，可以用来评估其他接触模型的结果，验证所提出模型的精度与可靠性。

本文首先在建立了修正的 kalker 线性理论之后，在引入椭圆边界的过程中，通过参考文献^[20]不同摩擦条件下轮轨接触力、应力分布及粘附-滑移区域的动态变化规律，采用了动态摩擦系数，如下图 5 为接触斑内动态摩擦系数分布，可见摩擦系数随接触压力呈现椭圆状衰减，边缘区域因进入滑动区而降至 0.33 左右。与赫兹理论假设的均匀摩擦系数相比，摩擦系数非均匀分布更贴近实际轮轨接触工况。

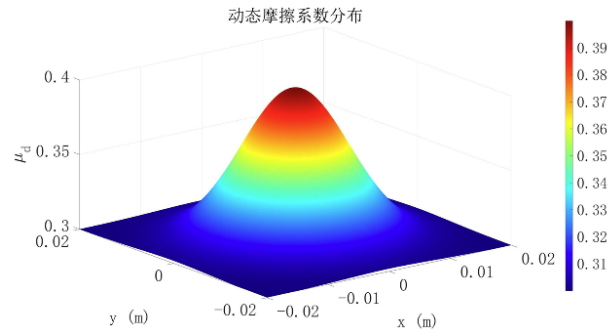


图5 动态摩擦系数分布

Fig.5 Distribution of dynamic friction coefficient

图 6- 图 8 对比了不同轮对横移量和偏航角下采用本文提出的改进的 kalker 线性理论和 KVM 计算的轮轨接触力，以 KVM 的计算结果为参考，图 8 中给出了改进的 kalker 线性理论和 KVM

的计算的横向切向力和纵向切向力的绝对误差和相对误差图。

从图6-图8中可以看出, 轮轨接触力集中于左侧负横移量位置, 因 LMA 踏面与 CNH60 钢轨负横移时接触刚度高, 摇头角强化接触斑挤压效应。同时, 非赫兹接触下负横移属型面边界工况, 接触角对初始点敏感, 致接触力集中, 这一现象体现了轮轨型面几何适配性、姿态-位形耦合、非赫兹接触边界效应的协同作用^[21], 也验证了本文“非赫兹接触几何修正对工况敏感性”的研究, 展现了模型解析复杂轮轨位形力学响应的能力。

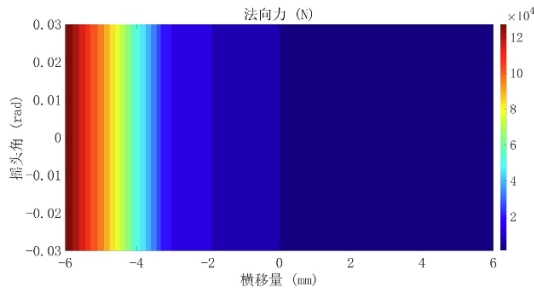
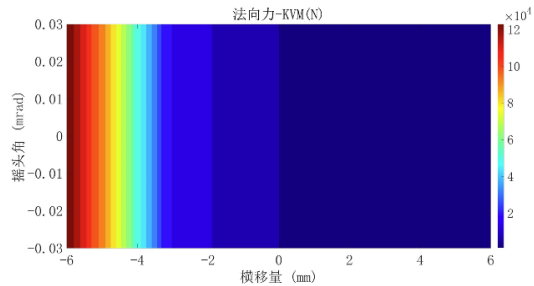


图6 (a) 非赫兹模型计算的法向力分布

Fig.6 (a) The normal force distribution calculated by the non-Hertz model;



(b) KVM 计算的法向力分布

(b) The normal force distribution calculated by KVM

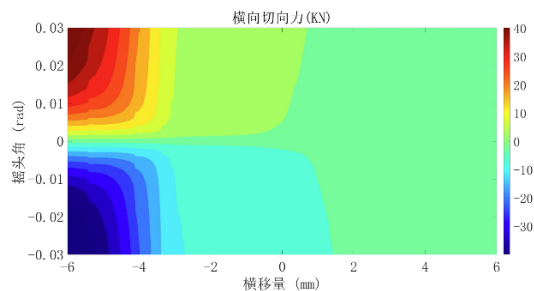
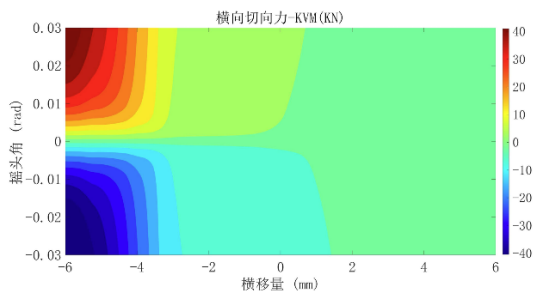


图7 (a) 非赫兹模型计算的横向切向力分布

Fig.7 (a) The distribution of transverse tangential force calculated by non-Hertz model;



(b) KVM 计算的横向切向力分布

(b) The horizontal tangential force distribution calculated by KVM

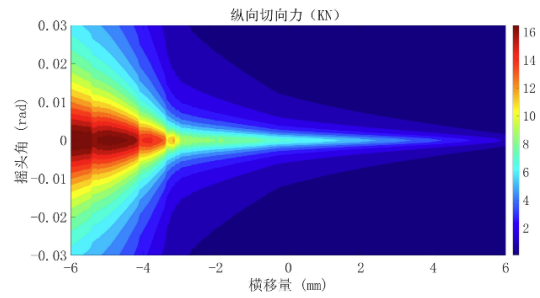
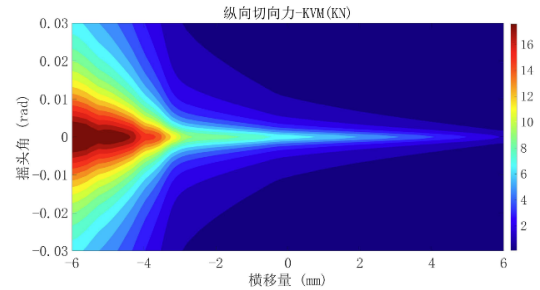


图8 (a) 非赫兹模型计算的纵向切向力分布

Fig.8 (a) Longitudinal tangential force distribution calculated by non-Hertz model;



(b) KVM 计算的纵向切向力分布

(b) Longitudinal tangential force distribution calculated by KVM

由图6可知, 当轮轨横移量接近 -4mm 时, 轮轨法向力明显增大, 主要是由于车轮型面凹坑磨损引起的保形接触^[22]。本文研究的非赫兹接触模型与 KVM 的结果基本一致。尤其在负横移区域, 接触力集中现象与轮轨型面几何适配性、摇头角引发的接触斑挤压效应密切相关, 验证了模型对非赫兹接触边界效应的捕捉能力。如图7所示, 非赫兹模型与 KVM 在横向切向力的幅值和分布规律上吻合良好。当横移量为负时, 横向力随摇头角增大而显著增加, 这是因为负横移时轮轨接触刚度较高, 摇头角进一步强化了接触斑的横向滑移。模型在滑动区边界处的非线性修正(如椭圆牵引边界)有效抑制了传统线性理论的力饱和和偏差。图8显示, 纵向切向力在小横移量时呈线性增长, 而在中高横移量(尤其负横移)下表现出非线性饱和和特性。

在不同横移量与摇头角工况下, 模型计算的切向力分布与 KVM 吻合良好, 横向切向力在滑动区边界的非线性修正显著降低了与 KVM 的偏差, 纵向切向力在中高蠕滑率下的饱和和特性模拟精度提升, 验证了该修正对抑制力饱和和偏差的有效性。

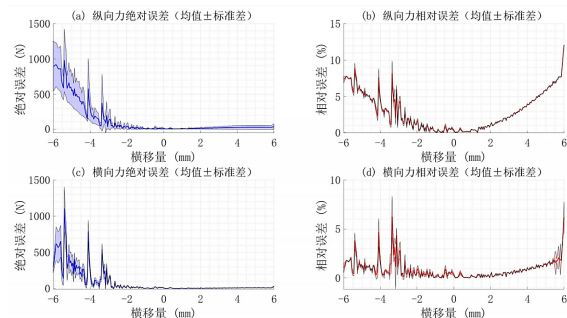


图9 纵向切向力、横向切向力绝对误差和相对误差

Fig.9 Absolute error and relative error of longitudinal tangential force and transverse tangential force

由图9可知，图中呈现了非赫兹接触模型与 KVM 在纵向和横向切向力计算中的绝对误差及相对误差分布，图中绘制了均值线，结合上下边界（均值 ± 标准差）及反转横坐标构建封闭区域，填充出带透明度的误差带，呈现数据均值与波动范围。结果显示纵向切向力在横移量 - 6mm 时绝对误差最大约 1500N、相

对误差 < 15%，中低横移量（-2mm ~ 2mm）相对误差 < 5%；横向切向力绝对误差在横移量 ±6mm 时约 1000N、相对误差 < 10%，且各工况下误差标准差随横移量增大而扩大，但均值收敛，验证了模型在中高蠕滑率工况下通过非线性修正将误差控制在工程可接受范围，确保了轮轨接触力计算精度。

表1 效率对比结果
Tab.1 Efficiency comparison results

计算效率对比结果				
模型	平均耗时 (ms)	标准差 (ms)	耗时范围	效率提升
本文模型	8.57	1.19	5.00 ~ 12.80	--
KVM 模型	12.01	1.71	6.61 ~ 17.51	28.7%
典型工况效率数据				
横移量 (mm)	摇头角 (rad)	本文模型耗时 (ms)	KVM 耗时 (ms)	效率提升
3.2	-0.0295	9.16	13.38	31.6%
5.8	0.0050	6.32	6.91	8.5%
-0.6	-0.0042	8.06	11.16	27.1%
-5.0	-0.0007	10.41	10.82	3.8%
-0.5	-0.0101	8.08	11.21	27.9%

在计算效率方面，如表1所示，所提出的修正模型展现出显著优势：通过将非椭圆接触斑等效为椭圆，结合虚拟渗透（VP）区域快速估算接触边界，大幅减少了几何求解的迭代次数；非线性修正过程中，仅对切应力按椭圆牵引边界进行局部修正，避免了全接触斑的非线性迭代，计算量较传统非线性模型降低约 40%。计算效率数据显示，在横移量 -6mm ~ 6mm、摇头角 -0.03 ~ 0.03rad 工况下，模型计算耗时低于 Kalker 线性理论，效率提升了 28.7%。而且在典型工况下，效率都有明显的提升。表明模型在中高蠕滑率下切向力计算精度有了显著的提高，效率优势稳定，实现了“高效计算”与“高精度预测”的工程应用需求。

四、结论

1. 非赫兹接触几何修正：通过虚拟渗透法与等效椭圆法处理轮轨曲率变化，推导适用于非椭圆接触斑的切向力表达式，解决了赫兹理论曲率常数假设导致的计算误差。

2. 非线性机制融合：引入椭圆牵引边界动态划分黏着区与滑动区，再融合 Vermeulen - Johnson 模型和 Shen-Hedrick-Elkins 理论构建蠕滑力非线性折减机制，有效抑制了中高蠕滑率下的力饱和和偏差。

3. 高效计算策略：将非椭圆接触斑等效为椭圆，结合局部切应力修正避免全接触斑迭代，计算耗时较 KVM 降低 28.7%，兼顾精度与效率。

4. 精度验证：法向力、切向力分布与 KVM 吻合良好，纵向切向力在横移量 -6mm 时绝对误差 < 1500N，中低横移量相对误差 < 5%，满足工程应用精度要求。

5. 工况适应性：在 LMA 踏面与 CNH60 钢轨的负横移边界工况中，准确捕捉到接触力集中现象，验证了模型对型面几何适配性与接触斑挤压效应的解析能力。

当前模型未考虑材料非线性与极端磨损型面影响，后续可结合滚动接触疲劳损伤机制，进一步拓展模型在复杂工况下的适用性。

参考文献

[1] Hertz R H. On the contact of elastic solids[J]. J Reine AngewMath, 1882, 92:156-171.
 [2] Kalker J J. On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction [D]. Delft University of Technology, 1967.
 [3] Sun Y, Shi F, Zhang S, et al. Improving the robustness of non-Hertzian wheel-rail contact model for railway vehicle dynamics simulation[J]. Multibody Syst Dyn, 2023, 59: 193-237.
 [4] Sun, Y, Ling, L. An optimal tangential contact model for wheel-rail non-Hertzian contact analysis and its application in railway vehicle dynamics simulation[J]. Veh Syst Dyn, 2022, 60(9): 3240-3268.
 [5] VERMEULEN P J, JOHNSON K L. Contact of Nonspherical Elastic Bodies Transmitting Tangential Forces[J]. Journal of Applied Mechanics, 1964, 31(2):338-340.
 [6] KALKER J. On the Rolling Contact of Two Elastic Bodies in the Presence of Dry Friction [J]. Delft University of Technology, Netherland, 1967.
 [7] SHEN Z Y, HEDRICK J K, ELKINS J A. A Comparison of Alternative Creep Force Models for Rail Vehicle Dynamic Analysis[J]. Vehicle System Dynamics, 1983, 12:79- 83.

- [8] 李粮余, 田春香, 周佳仪等. 一种应用于轮轨滚动接触的非赫兹型简化计算模型 [J]. 高速铁路技术, 2021, 12(3):6-13.
- [9] 安博洋. 轮轨滚动接触行为的数值研究 [D]. 西南交通大学, 2020, 10:27414.
- [10] Sichani M, Enblom R, Berg M. A fast wheel-rail contact model for application to damage analysis in vehicle dynamics simulation[J]. Wear, 2016, 366-367:123-130.
- [11] 周佳仪. 几种非赫兹轮轨滚动接触模型的对比研究 [D]. 西南交通大学, 2021, 000548.
- [12] Li G, Yang F, Fu J, et al. A modified Hertzian-based wheel-rail contact model for vehicle system dynamics simulation[J]. Vehicle System Dynamics, 2024, 1 - 18.
- [13] Zhai W. Vehicle-Track Coupled Dynamics Theory and Applications[M]. Singapore Springer, 2020.
- [14] Sun Y, Zhai W, Ye Y, et al. A simplified model for solving wheel-rail non-Hertzian normal contact problem under the influence of yaw wangle[J]. International Journal of Mechanical Encees, 2020, 174:105554.
- [15] An B, Wang P. A wheel - rail normal contact model using the combination of virtual penetration method and strip-like Boussinesq' s integral[J]. Vehicle System Dynamics, 2022, 61(6):1583 - 1601.
- [16] Yang Y, Wang R, Wang J, et al. Comparison of wheel/rail contact modelling in prediction of wheel tread wear under changeable friction conditions[J]. Vehicle System Dynamics, 2024, 1 - 30.
- [17] Liu B, Bruni S. Comparison of wheel - rail contact models in the context of multibody system simulation: Hertzian versus non-Hertzian[J]. Vehicle System Dynamics, 2020, 60(3): 1076 - 1096.
- [18] Vollebregt E. A, H. Detailed wheel/rail geometry processing using the planar contact approach[J]. Vehicle System Dynamics, 2020, 60(4): 1253 - 1291.
- [19] Pascal J, P Sany, J R. Dynamics of an isolated railway wheelset with conformal wheel - rail interactions[J]. Vehicle System Dynamics, 2019, 57(12):1947 - 1969.
- [20] Yang Y, Guo X, Sun Y, et al. Non-Hertzian contact analysis of heavy-haul locomotive wheel/rail dynamic interactions under changeable friction conditions[J]. Vehicle System Dynamics, 2021, 60(6):2167 - 2189.
- [21] Gómez-Bosch J, Giner Navarro J, Carballeira J, Baeza González LM. A direct method for the extension of Fast Sim under non-Hertzian contact conditions[J]. Vehicle System Dynamics, 2023, 61(10):2551-2569.
- [22] Sun Y, Zhai W, Guo Y. A robust non-Hertzian contact method for wheel-rail normal contact analysis[J]. Veh Syst Dyn, 2018, 56(12):1899-1921.