

信息技术助力深入理解和区分无界函数与无穷大量

杨晓丹, 王兵, 梁爽

航天工程大学 基础部, 北京 101416

DOI: 10.61369/ETR.2026020042

摘 要 : 高等数学中, 函数无界与无穷大量作为核心概念, 常令学生感到困惑。本研究创新性地借助 GeoGebra 软件这一强大的数学工具, 直观而生动地展示了无界函数与无穷大量之间的差异。通过动画模拟函数图像在特定区间内的无限延伸或振荡, 学生直观理解了“无界”并非等同于“无穷大”。这一设计不仅显著提升了学生对这两个概念的理解深度, 还极大地促进了他们的空间想象能力和逻辑思维能力的发展, 激发了创新思维和探索精神, 为培养高素质的数学人才奠定了坚实基础。

关 键 词 : 无界函数; 无穷大量; Geogebra

Information Technology Facilitates In-depth Understanding and Distinction between Unbounded Functions and Infinite Quantities

Yang Xiaodan, Wang Bing, Liang Shuang

Department of Basic Sciences, Aerospace Engineering University, Beijing 101416

Abstract : In advanced mathematics, the core concepts of unbounded functions and infinite quantities often confuse students. This study innovatively utilizes GeoGebra, a powerful mathematical tool, to visually and vividly demonstrate the differences between unbounded functions and infinite quantities. Through animated simulations of function graphs extending infinitely or oscillating within specific intervals, students gain an intuitive understanding that "unbounded" does not equate to "infinite." This design not only significantly enhances students' depth of understanding of these two concepts but also greatly promotes the development of their spatial imagination and logical thinking abilities, stimulating innovative thinking and a spirit of exploration, thereby laying a solid foundation for cultivating high-quality mathematical talents.

Keywords : unbounded functions; infinite quantities; Geogebra

引言

信息技术在当代数学教育中扮演着不可或缺的角色, 它不仅革新了传统的教学方式, 而且极大地丰富了学习体验, 加深了学生对数学概念的理解。它可以直观化呈现复杂概念, 特别是图形计算器和数学软件(如 GeoGebra、Desmos、MATLAB 等), 能够将抽象的数学概念以直观、生动的图像或动画形式展示出来。这对于学生来说, 尤其是对那些在视觉上更容易吸收信息的学习者, 是极其有益的。例如, 在理解无界函数和无穷大量时, 通过动态图像展示, 学生可以直观地看到函数图像的变化趋势, 从而加深对数学概念的理解。

一、函数无界与无穷大量的定义

在高中学习阶段, 学生接触过函数的有界性, 即: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$ 。如果存在数 K_1 , 使得 $f(x) \leq K_1$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界。如果存在数 K_2 , 使得 $f(x) \geq K_2$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, 而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界。如果存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界。如

果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界; 也就是说, 如果对于任何正数 M , 总存在 $x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界。从无界性的定义可以看出函数无界性是一个局部性质, 它描述了函数在某个区间或集合上没有上界或下界。

无穷大量是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 就称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大。定量描述即: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义)。如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 只要 x 适合不等式

$0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$)，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)| > M$ ，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大。从定义可以看出无穷大是一个变量，不可与很大的数(如一千万、一亿等)混为一谈。无穷大是描述函数的一种状态，并且从定义可以看出无穷大必定无界。但无界函数不一定是无穷大。例如函数 $x \sin x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时是无界的，因为任意给定 $M > 0$ ，总能找到 x 的值，如 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，使

$$|x \sin x| = \left| \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right| > M,$$

但 $x \sin x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时不是无穷大。因为当 $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ 时， $x \sin x = 0$ ，所以不能满足无穷大定义中“只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$)，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)| > M$ ”这个要求。

无穷大量与无界函数之间的关系往往是学生学习的痛点，但借助现代教育技术，如 GeoGebra 软件，我们可以将这些抽象的概念具象化，从而帮助学生更好地理解 and 掌握。

二、函数无界与无穷大量和 GeoGebra 的融合策略

为了帮助学生理解函数无界与无穷大量的关系，我们可以借助 GeoGebra 这一动态几何画板软件。通过精心设计的指令和动画，直观地展示 $x \sin x$ ，从而帮助学生们跨越认知上的障碍。具体实施策略如下：

步骤 1: 定义一个无穷大量。例如， $\frac{1}{x-1}$ 在 $x \rightarrow 1$ 时是无穷大量。

步骤 2: 定义一个无界函数， $x \sin x$

步骤 3: 创建滑动条 M 。

步骤 4: 绘制函数 $y = M, y = -M$

步骤 5: 绘制函数图形与 x 轴交点。

步骤 6: 动态演示。当滑动条的值改变时，总有函数值 $f(x) = 0$ ，无法满足不等式 $|f(x)| > M$ 。

通过精心设计的这些步骤，我们使学生能够直观地体验到无界函数与无穷大量的本质差异，从而深化他们对这两个概念的认识。在这个过程中，学生不仅能够更加清晰地把握无界函数的特点，还能准确理解无穷大量的含义。此外，这一系列的教学活动有效提升了学生的空间想象力和逻辑思维能力，为他们在数学领域的发展奠定了坚实的基础。

三、用 GeoGebra 动态展示详细制作过程

1) 启动 GeoGebra 软件，分别打开绘图区、代数区。

2) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入：

说明：绘制直线 $\frac{1}{x-1}$

3) 点击工具栏上的 ，在绘图区建立滑动条，在出现的

滑动条属性框中(图1)。

说明：用于控制自变量无限趋近于1的变化趋势。



图1 滑动条的属性设置

4) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入：极限 (f, a)

说明：计算函数在 $x \rightarrow a$ 时的极限。当 $x=1$ 时极限不存在，代数区中显示极限值 b 为“?”号(图2)。

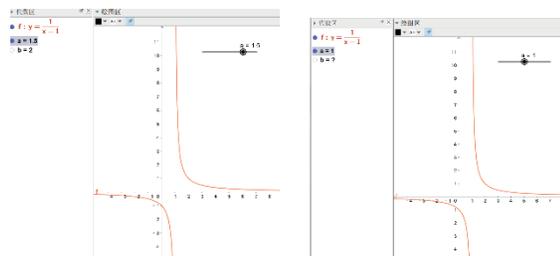


图2 函数极限

5) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入：

说明：绘制直线 $x \sin x$ ，并在绘图区中单击函数图像，在上方出现的属性框中调整曲线的粗细及演示等。

6) 点击工具栏上的 ，在绘图区建立滑动条，在出现的滑动条属性框中(图1)。

说明：生成任意的正整数 M 。



图3 滑动条 M 的属性设置

7) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入：

说明：绘制直线 $y=M$ ，并根据显示效果设置粗细颜色等属性。

8) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入：

说明：绘制直线 $y=-M$ ，并根据显示效果设置粗细颜色等属性。

9) 点击工具栏上描点按钮 ，下拉选择零值点按钮(图4)，然后单击绘图区中的函数图像，绘图区出现函数零点。

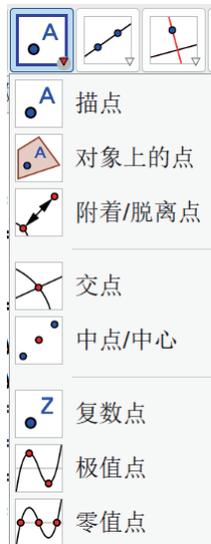


图4 零值点按钮

说明：绘制函数 $x \sin x$ 的零点，在代数区分别自动出现相应零点的坐标，并按英文字母顺序自动命名。

10) 点击工具栏上的 ，在绘图区建立按钮，在出现的按钮框中（图5）按行输入如下脚本：

```
Setvalue(k, !k)
启动动画 (M, k)
设置标题 (button1, if(k, "暂停", "启动"))
```



图5 按钮

说明：此按钮的功能是为了启动滑动条 M 。

上述设置为演示提供了基础框架，通过启动按钮启动滑动条

M ，可以观察到不论 M 取多大，总有曲线夹在直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间，也即说总有点 x ，使函数值 $|f(x)| < M$ （图6），这说明函数 $x \sin x$ 虽然无界但不是无穷大量。通过图像的直观观察，加深对函数无界与无穷大之间关系的理解，同时，这一演示也提醒我们，在研究函数性质时，不能仅仅依赖于理论推导，还需结合图像直观地观察和分析。这样，我们才能更准确地把握函数的内在规律，为解决实际问题提供有力的数学工具。

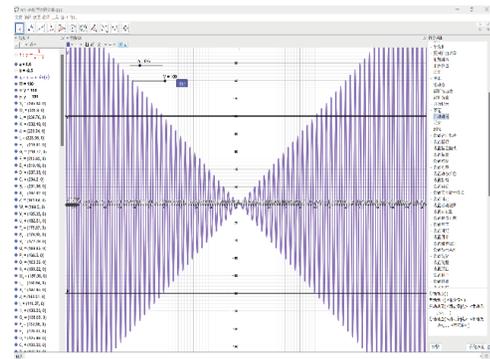


图6 无界函数 $x \sin x$

四、总结

在使用 Geogebra 软件演示无界函数与无穷大量的过程中，我们得到了深刻的启示和丰富的体验。Geogebra 作为一款动态数学软件，为我们提供了一个直观、便捷的学习平台。通过设置滑动条 M ，我们发现，不论 M 多大，总有函数图像在直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间波动，但这说明函数是无界的，但并非无穷大量。此次演示还让我们体会到了数学探究的魅力。在调整滑动条 M 的过程中，我们不断观察、思考、总结，逐步揭示了函数的性质。这不仅锻炼了学生的动手操作能力，还培养了学生的观察能力和逻辑思维能力。总之，利用 Geogebra 演示无界函数与无穷大量的过程，让学生对这两个概念有了更加清晰的认识。激发了学生对数学学习的兴趣和热情。

参考文献

[1] 同济大学数学系，高等数学 [M]，第 8 版，北京：高等教育出版社，2023。
 [2] 赵越，杨晓丹，王琳静，周盛华. GeoGebra 环境下数形结合思想教学研究. 《高等数学研究》. 2023年7月, 26(4): 24-25 页.
 [3] 杨晓丹，赵越，王琳静，周盛华. 柱壳法求旋转体体积的可视化教学. 《电脑编程技巧与维护》. 2023年9月, 459: 156-158 页.
 [4] 杨晓丹，赵越，王琳静，周盛华. 基于 GeoGebra 软件的螺旋线的可视化教学研究. 《数字化用户》. 2023年, 29(24): 293-295 页.
 [5] 马丽霞，杨晓丹. 基于 GeoGebra 软件的常见的的抽样分布的可视化教学研究. 《大众科学》. 2023年, 15: 31-33 页.
 [6] 杨晓丹，赵越，王琳静，周盛华. 基于 GeoGebra 的定积分元素法的教学研究. 《高等数学研究》. 2023年7月, 26(4): 21-23 页.
 [7] 王贵军，GeoGebra 与数学实验 [M]，北京：清华大学出版社，2017。
 [8] 赵娜，多媒体环境下定积分元素法的教法初探，数学学习与研究，2017。