

数学优化方法在多目标决策系统中的收敛性分析

杜易飞

西北师范大学, 甘肃 兰州 730000

DOI:10.61369/EST.2025110018

摘 要： 本文详细研究了数学最优化方法在多种选择系统中的稳定性性质，并通过对6个基本稳定的类别分析揭示了多样化的最优化问题的基本特征以及解决方案规则；本文研究表明，在多样化选择中存在数学最优化方法所具有的独特性稳定性，这种稳定状况对于决定计划的实用性和效果至关重要。本文分析了6个典型的经典算法求解多目标优化问题的应用，为多目标决策系统提供了一定的参考价值和指导意义，在一定程度上扩展了多目标优化领域的内容并能有效应用于实际决策问题中。

关 键 词： 数学优化；多目标决策；收敛性分析；帕累托最优；决策系统

Convergence Analysis of Mathematical Optimization Methods in Multi-Objective Decision-Making Systems

Du Yifei

Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu 730000

Abstract： This paper provides a detailed study of the stability properties of mathematical optimization methods in multi-choice systems. By analyzing six fundamental categories of stability, it reveals the basic characteristics and solution rules of diverse optimization problems. The research demonstrates that mathematical optimization methods exhibit unique stability in diverse choices, a condition that is crucial for determining the practicality and effectiveness of plans. This paper analyzes the application of six typical classical algorithms in solving multi-objective optimization problems, offering certain reference value and guidance for multi-objective decision-making systems. To a certain extent, it expands the content of the multi-objective optimization field and can be effectively applied to practical decision-making problems.

Keywords： mathematical optimization; multi-objective decision-making; convergence analysis; pareto optimality; decision-making system

引言

很多领域中的项目里都会存在多目标决策的问题，并且需要同时考虑几个相互矛盾的目标函数来进行优化，而使用数学上的优化方法解决这些问题就是一种有效的方式，而评价其行为以及解决方案质量的核心也就是对其收敛性分析。随着决策系统越来越复杂，对于单目标优化方法已不能适应实际需求，由此提出了多目标优化方法^[1]。本文主要讨论了多目标决策系统中数学规划方法稳定性的相关特性，是为了认识其内在规律性而为复杂多目标决策提供理论支撑。本文的研究是从现实世界中诸如物资分配、生产计划等具有多个相互关联目标的实际多目标决策系统出发的。本文从数学优化方法的稳定性分析出发，给不同的选择机制提供了一种新的视角以及思路。

一、数学优化方法在多目标决策系统中的收敛性分析重要性

收敛性描述了求优过程中逐渐逼近最优方法的过程及方式。对于多目标优化问题可以分成两种类型的收敛性：全局收敛性和局部收敛性，所谓全局收敛性即算法能搜索到所有可行解空间并且能找到全局最优解；而局部收敛性则是指其在一个解空间范围内不断稳

定收敛的情况。从实用的角度来看，全局收敛性是一个非常重要的稳定性条件。实际上很多多目标最优化问题是处理多个关联的目标函数值（例如收益率等）的问题，因此探讨所提方法的收敛性就显得尤为重要——它是否能够有效搜索到所有相关目标之间的帕累托最优解呢？例如，在资源分配或投资组合优化等问题中，缺乏有效的收敛策略会导致错误决策而造成金融市场震荡^[2]。

两种群体智能方法：基因算法 (GA) 和 PSO 都是在模拟自然

界进化过程或是群体行为的过程中寻找解空间,其收敛性质通常是基于 Markov 随机过程进行分析并证明能够以高概率寻找到全局最优解。例如,MOA 就是一种包含从全局向局部的搜索成分合作的过程。它比传统的方法在实践中更有成效,有更高的收敛成功概率和准确度。实际应用中有许多这样的例子,在最优设计、运输问题以及金融投资等问题中都涉及收敛性研究。

例如,在道路流量控制的例子中可以利用改进算法提高计算效率,但由于多目标问题是复杂并具有隐含不可一致性的,使得评价收敛性质成为一项艰巨的任务(尤其是当同时考虑多个目标的时候);对非线性问题的局部最优解以及参数之间的相关关系也是个难题。分析多目标决策系统数学优化方法的收敛性具有重要的理论价值和现实意义:理论上揭示了多目标最优化问题的基本特征及其算法设计和性能评估的基础;收敛性分析能反映算法在多目标空间上的搜索情况,由此了解解集的分布特征以及其演化过程;而在实际应用中,对收敛性进行研究可以确定方案的实际使用价值及工作效率,是解决复杂决策系统的关键步骤之一。在需要求解含有多个目标的问题例如项目计划或者任务排序等问题中,利用收敛性的评价方式能够很好地处理各目标之间的冲突性,最终得到一个比较合理的平衡结果。另外这种分析方法还能够指导优化过程中对改进的优化,从而加快计算的速度并改善最终的结果品质。所以收敛性分析是构建多目标优化理论体系的关键环节之一,在推动该领域发展方面发挥着重要作用^[3]。

二、数学优化方法在多目标决策系统中的收敛性分析

收敛性分析广泛应用于工程学、交通运输、金融等领域中,在交通流控制过程中,收敛性分析直接影响了系统运行效率,可以通过对其中参数值进行适当的调节而改善这种描述能力。但是因为多目标优化问题本身的不确定性以及可能存在的目标矛盾,这将导致收敛性分析非常困难;另外对非线性问题来说,局部最优解的难点和参数的选择(例如步长)也是问题所在。

(一) 全局收敛性

所谓全局收敛性就是指无限时间下能够收敛到帕累托前沿的一种性质,在多目标科学设计优化中,全局收敛性确保算法能够探索出所有非劣解并最终形成完整的备选集。为此,我们借助于搜索能力和收敛判别条件来做到这一点,包括优良个体的选择方法、群体多样性的保持技术等诸多方面的重要因素。

尽管具有强全局收敛性质的算法能够更好地处理所有多峰函数以及防止陷入局部极值点等问题,但是它最大的弊端就是降低了算法的运算效率,在实践中我们需要权衡算法的收敛性和精确度的问题。我们发现如果适当改进变异方式和选择策略,则可以改善这一类问题的全局收敛性^[4]。例如,在工程设计问题中,它会给出更多可供选择的设计方案,给决策者更大的自由度来选取设计方案;深入理解它的全局收敛性质的本质也有助于发展出高效处理多峰函数的优化算法,从而获得坚实的理论依据。

(二) 局部收敛性

局部收敛性是指对某个解邻域区域的收敛情况而言,在这个

意义上算法的性能及精确程度称为局部收敛性。多元化的选取问题中,强局部收敛的算法能够快速定位到求解空间的一个区域,并以此提高搜索效率。而该特征由算法的局部搜索策略决定,如利用梯度信息以及邻域查询方法等等。在实际应用中,局部收敛性对于解决精细化程度高的优化问题是有益处的,如小型电子产品设计等。

但是单纯使用局域搜索可能会出现陷入局部最优的情况,因此我们需要加入全局搜索机制。通过大量研究实验得出:采用自适应的方式对步长和变异因子进行控制能有效改善算法陷入局部最优的现象。以资源调度为例,具有强局部收敛特性的方法往往能够在较短的时间内寻找到近似最优解,在分析算法性能以及确定参数配置中深入研究了局部收敛性的重要意义。

(三) 收敛速度

算法的求解速度是指其逼近最优解的程度快慢;算法的求解精度指其逼近最优解的程度深浅程度;在多目标优化过程中,速度越快,则整个算法可以在较短的时间内得到结果并提供决策支持;而算法效率主要受群体规模、变异率以及选择压力等因素的影响。现实中对收敛速度进行分析可以为算法参数的调整提供参考,从而达到既能广度搜索又能深度搜索的目的。研究表明优化选法及置换策略可提高算法的收敛速度。例如应用算法求解运输调度问题中若算法收敛速度快,则这就能够及时地找到有效的工作方案。所以对算法设计和使用而言,收敛速度分析提供了定量评估指标。

(四) 收敛精度

收敛精度决定了在使用某种优化方法得到的最优解集离真实 Pareto 最优前沿的距离,它体现了该优化算法发现高质量最优解集的能力。对于多目标决策问题而言,在具有高收敛性能的优化算法下,其得到的最优解集能够更加逼近真实的帕累托前沿,从而保证较高的决策质量。此准则值受搜索算法和评价机制的影响,如精英保护法、群集多样化维护方法等等^[5]。通过对收敛精度产生的机理进行深入分析能够很好地适应飞机设计这种对精度要求高的优化工作。本文的研究结果表明:改进变异算子和选择算子有助于提高算法的收敛精度;例如在投资组合优化中,收敛精度高的算法能寻找到更加贴近最优的投资组合。因此,收敛精度是评价算法的重要指标之一。

(五) 收敛稳定性

收敛性是指该算法反复求解是否稳定地收敛到某个值上,这是评估算法的重要指标之一,其关系着该算法结果的可信程度及风险大小。若面对多属性决策问题,采用具有较高收敛性的算法得到的结果则较为可靠、风险较小。这一稳定特性受两方面影响:一是搜索方法;二是某些关键性设置参数,如变异率、适应度选择强度系数等。实践中,评价收敛稳定性方法已经被广泛应用于解决各类复杂优化问题(如经济预测等方面),一些文献指出可以通过变化变异原则以及优化选择策略来改善算法收敛稳定性效果。比如对于供应链优化而言,采用高收敛稳定度的算法能够持续不断地生成可信的最优解。所以,收敛稳定性分析能为算法应用提供坚实的理论保障。

（六）收敛多样性

收敛多样性是指对一个由优化算法产生的结果集合而言，在解决该问题过程中算法表现出的探索能力强弱，即指求得解的多样性。针对多目标优化问题来说，良好的收敛多样性能够获得较多的非支配解，增加决策者的选择空间。该目标函数往往受搜索过程中的算法策略以及适应度评估方式影响，在实际应用过程中常采用拥挤距离、细分区域等方式对其进行修正。在实际运用场景下，对优化进程中的收敛多态性的深入探讨有助于应对诸如城市交通计划等复杂的优化难题。我们预计，通过调整变异性管理和选择方法能提升算法的收敛多元化程度。以环保为例，更具收敛多样的算法更有可能发现更多的有效环保解决方案。因此，评价收敛多态性为我们提供在设计算法过程中保持多样性的方法。

三、数学优化方法在多目标决策系统中的收敛性展现

（一）遗传算法

遗传算法是以生物进化为基础的一种启发式优化方法，在多目标决策领域有着广泛的应用，可以用来解决具有多个优化目标的问题，并且具有较强的全局收敛能力和良好的群体多样性维护能力。遗传算法作为工程优化的方法之一，在优化过程中能为决策者提供多个备选方案供其评价。通过对变异算子以及选择策略的改进可进一步提升算法的收敛性能，并有学者证明了该算法用于解决复杂多目标决策问题的有效性和实用性。

（二）粒子群优化

PSO 是一种基于群体智能实现优化技术的一种方法，其灵感来源于鸟觅食行为从而进行优化搜索，在较短的时间内就能快速收敛，并能够很好地进行局域搜索，因而适用于多目标的优化求解。在实际应用中，该优化算法能在较短时间内得到接近最优解的结果，这样就可以提高决策的速度了。为了使其能够具有更好的收敛效果，则可以将粒子群优化中的惯性以及学习因子来进行改进。经过实践证明，在处理复杂多目标问题的过程中，该方法有着明显的优势。

（三）差分进化算法

采用基于种群中个体之间的差异性自适应优化技术——差分进化算法 (Differential Evolution Algorithm)，模拟生物在进化过程中的变异和选择操作来寻找最优解。该方法具备全局收敛性和多样性。所以很适合用来处理复杂、多目标决策的问题，该算法能得到一组最优解集，为决策者提供多个选择方案，在提高其

效率上，主要是优化变异策略以及配对方法。从实验结果来看，差分进化算法能够很好地应用于多目标决策问题中。

（四）模拟退火算法

模拟退火算法就是运用物理学中的退火过程来进行求解的方法，它是模拟金属材料的冷却过程从而实现优化效果的一种算法，具有全局收敛性和局部搜索能力，所以其适用于多目标决策问题的研究。研究表明，此方法可以提高在求取次优解过程中所获得的决策水平。可通过对冷却方案以及邻域搜索方案的改进来提高它的收敛性，证明了 SA 算法在解决多种决策问题中是有效的。

（五）蚁群算法

蚁群优化算法是模拟自然界中蚂蚁觅食行为研究提出的一种智能求解方法，该类算法是根据信息素传递来实现寻找最优解的，并且其全局搜索能力和多样性较强，在处理多目标、复杂的决策问题方面有着独特的优势。需要注意的是，该算法能产生多个可能解以供决策者选择，在本文的研究中主要改进的是信息素更新的过程以及路径选取方法，大大提升了算法的稳定性与效率，并验证了其在多目标决策方面的广泛适用性。

（六）神经网络优化

nso 是一种利用人工神经网络对问题求解的方法，它是根据人脑中神经元的功能而设计的一种计算方法。该算法具有收敛速度快及良好的局域最优特性等特点，在解决复杂的多目标决策问题方面有独特的优势。综上所述，本文算法能够快速逼近最优解，提升了智能决策系统的工作效率，在优化网络结构以及学习策略的基础上，可提升算法的收敛速率。相关研究表明，本文算法具有良好的泛化能力，并适用于各类决策场景。

四、结束语

本文深入探讨不同决策环境下数学最佳选择法所表现出的不同稳定性特征，并针对6大类基本稳定类型匹配相应的最佳选择法则；我们得出结论：在任何一种决策情形下，数学最佳选择法都会呈现出不同的稳定性特性，而这将会导致解决实际问题的有效性以及实现的效果存在差异。本文深入研究了收敛性的一些深层性质，并利用这些收敛性性质为我们的复杂决定系统的最优解提供了方法和支持。后续的工作可以考虑对上述收敛性结果推广到动态 MMDP 中，以及将上述收敛性方法与其它优化方法结合使用等等。总之，本文一方面丰富了 MMDP 的研究内容，另一方面也给现实世界中的决策问题提供了一定启发。

参考文献

- [1] 李宝磊, 施心陵, 苟常兴, 吕丹桔, 安镇宙, 张榆峰. 多元优化算法及其收敛性分析. 自动化学报, 2025, 41(5): 949 - 959.
- [2] Lee S, Abbott P. Bayesian networks for knowledge discovery in large datasets: Basics for nurse researchers[J]. Journal of Biomedical Informatics, 2003, 36: 389-399.
- [3] Fenton N, Neil M. Making decisions: Using Bayesian nets and MCDA[J]. Knowledge-Based Systems, 2021, 14(7): 307-325.
- [4] Zhu J, Deshmukh A. Application of Bayesian decision networks to life cycle engineering in Green design and manufacturing[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2023, 16: 903.
- [5] 叶跃祥, 糜仲春, 王宏宇, 等. 基于贝叶斯网络的不确定环境下多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2021, 27(4):