

拉格朗日乘数在多约束图像配准中的数学建模与应用特性研究

董慧, 李洁琼

安徽工业经济职业技术学院, 安徽 合肥 230001

DOI: 10.61369/TACS.2025110050

摘 要 : 图像配准是计算机视觉与医学影像分析的核心技术, 旨在实现不同条件下采集图像的空间对齐。多约束配准通过融合多重约束提升精度与鲁棒性, 但加剧了优化问题复杂度。拉格朗日乘数法为带约束优化提供了高效求解思路, 本文系统研究其在多约束图像配准中的数学建模与应用特性, 在梳理相关理论基础后, 构建融合多重约束的拉格朗日优化模型, 并推导最优解的求解过程, 为复杂场景下的高精度图像配准提供了理论依据与可行的解决方案。

关 键 词 : 图像配准; 拉格朗日乘数法; 多约束优化; 数学建模; KKT 条件

Research on the Mathematical Modeling and Application Characteristics of Lagrange Multipliers in Multi-Constrained Image Registration

Dong Hui, Li Jieqiong

Anhui Vocational College of Industrial Economy, Hefei, Anhui 230001

Abstract : Image registration is a core technology in computer vision and medical image analysis, aiming to achieve spatial alignment of images acquired under different conditions. Multi-constraint registration enhances accuracy and robustness by integrating multiple constraints, but it also increases the complexity of the optimization problem. The Lagrange multiplier method provides an efficient solution for constrained optimization. This paper systematically investigates its mathematical modeling and application characteristics in multi-constraint image registration. After reviewing the relevant theoretical foundations, a Lagrange optimization model integrating multiple constraints is constructed, and the process for solving the optimal solution is derived. This work provides a theoretical basis and a feasible solution for high-precision image registration in complex scenarios.

Keywords : image registration; lagrange multiplier method; multi-constraint optimization; mathematical modeling; KKT conditions

引言

随着图像处理技术发展, 图像配准在医学影像诊断、遥感分析、计算机视觉导航等领域广泛应用。医学领域中, 多模态影像配准助力病灶精准定位^[1]; 遥感领域通过配准实现地表变化监测^[2]; 计算机视觉中, 配准在三维重建、视觉同步与定位、目标识别与跟踪、检索等计算机视觉任务均有着广泛的应用^[3]。

传统配准多基于单一约束, 在简单场景效果尚可, 但实际应用图像易受噪声、光照、遮挡等干扰, 单一约束难以保证精度与鲁棒性。多约束配准通过融合几何、灰度、平滑等多重信息弥补不足, 但也转化为复杂带约束优化问题, 高效求解并保证最优解合理性成为核心挑战。

拉格朗日乘数法通过引入乘数将带约束优化转化为无约束问题, 具有理论严谨、求解高效等优势, 已成功应用于多个领域。将其应用于多约束配准建模, 可实现目标函数与约束的统一优化, 为复杂场景配准提供新思路, 具备重要理论与应用价值。

一、相关理论基础

(一) 图像配准

图像配准^[4]的本质是寻找一个空间变换, 将待配准图像(浮动图像)映射到参考图像的坐标系下, 使得两者对应区域的信息尽可能一致。其核心流程包括: 图像预处理、特征提取与匹配、

变换模型估计、图像重采样与插值。其中, 变换模型的选择与相似性度量的设计是影响配准精度的关键因素。

1. 变换模型

变换模型用于描述浮动图像与参考图像之间的空间映射关系, 根据变换的复杂性可分为刚性变换、仿射变换和非刚性变换。刚性变换包含平移、旋转和翻转等变换, 表达式为:

项目信息:

安徽省2025年高校中青年教师培养行动项目(优秀青年教师培育项目), 项目编号: YQYB2025167。

2025年度安徽省职业与成人教育协会教育科研规划课题(课题名称: 数字化背景下高职院校数学教师数字素养提升策略研究, 课题编号: AZCJ2025131)

$$x' = a_1 x - a_2 y + b_1$$

$$y' = a_2 x + a_1 y + b_2$$

其中, (x, y) 为浮动图像像素坐标, (x', y') 为映射后的参考图像像素坐标, $a_1 = \cos \theta$, $a_2 = \sin \theta$, θ 为旋转角度, b_1, b_2 为平移量。

仿射变换包括了旋转、缩放、平移等操作^[5], 表达式为:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为缩放、旋转和剪切系数, b_1, b_2 为平移量。

非刚性变换用于描述图像的弹性形变, 常见的非刚性变换模型包括 B 样条变换、薄板样条变换 (TPS) 等。其中, B 样条变换通过基函数的线性组合实现局部形变, 表达式为:

$$T(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(x) N_{j,l}(y) P_{i,j}$$

其中, $N_{i,k}(x), N_{j,l}(y)$ 为 k 次、 l 次 B 样条基函数, $P_{i,j}$ 为控制顶点, m, n 为控制顶点的数量。

2. 相似性度量

相似性度量^[6]用于量化配准后浮动图像与参考图像之间的一致性, 常用的相似性度量包括灰度相似性度量和特征相似性度量。

灰度相似性度量直接基于图像的灰度值计算, 如互相关系数 (CC)、归一化互相关系数 (NCC)、互信息 (MI) 等。互相关系数用于衡量两图像灰度值的线性相关程度, 表达式为:

$$CC = \frac{\sum_{(x,y)} (I(x,y) - \bar{I})(J(x',y') - \bar{J})}{\sqrt{\sum_{(x,y)} (I(x,y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{(x,y)} (J(x',y') - \bar{J})^2}}$$

其中, $I(x, y)$ 为参考图像灰度值, $J(x', y')$ 为配准后浮动图像灰度值, $\bar{I}, \bar{J}$ 分别为两图像的灰度均值。

互信息基于信息论中的熵概念, 衡量两图像灰度分布的统计相关性, 适用于多模态图像配准, 表达式为:

$$MI(I, J) = H(I) + H(J) - H(I, J)$$

其中, $H(I)$ 、 $H(J)$ 分别为参考图像和浮动图像的边缘熵, $H(I, J)$ 为两图像的联合熵。

特征相似性度量基于图像的角点、边缘等特征点描述子匹配, 具有较强的抗光照变化和噪声干扰能力, 但计算复杂度较高。

(二) 拉格朗日乘数法^[7]

拉格朗日乘数法是求解带约束优化问题的经典数学方法, 适用于目标函数为连续可微函数, 约束条件为等式约束或不等式约束的优化问题。其核心思想是通过引入拉格朗日乘数, 将带约束优化问题转化为无约束的拉格朗日函数的极值求解问题。

1. 等式约束优化问题求解

对于等式约束优化问题:

$$\text{目标函数: } \min f(x) \text{ (或 } \max f(x) \text{)}$$

$$\text{约束条件: } g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为优化变量, $f(x)$ 为目标函数, $g_i(x)$ 为等式约束函数, m 为约束条件个数, 且 $m < n$ 。

根据拉格朗日乘数法, 引入拉格朗日乘数 $\lambda_i \in \mathbb{R}$, 构建拉格朗日函数:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x),$$

则原等式约束优化问题的极值点满足拉格朗日函数的一阶偏导数为零, 即:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

通过求解上述方程组, 可得到优化变量 x 的极值点, 进而确定原问题的最优解。

2. 不等式约束优化问题求解

对于不等式约束优化问题:

$$\text{目标函数: } \min f(x) \text{ (或 } \max f(x) \text{)}$$

$$\text{约束条件: } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

此时需要引入 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件, KKT 条件^[8]通常用于解决非线性规划问题中含有不等式约束优化的情况。构建拉格朗日函数:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

则 KKT 条件包括:

$$(1) \text{ 一阶最优性条件: } \nabla_x L(x, \lambda) = 0;$$

$$(2) \text{ 可行性条件: } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(3) \text{ 互补松弛条件: } \lambda_i g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(4) \text{ 非负性条件: } \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m。$$

通过求解满足 KKT 条件的优化变量 x 和拉格朗日乘数 λ , 可得到原不等式约束优化问题的最优解。

二、基于拉格朗日乘数的多约束图像配准数学建模

(一) 目标函数构建

图像配准的目标函数用于衡量配准后图像的一致性, 本文结合灰度相似性与特征相似性, 构建混合相似性目标函数, 目标函数为

$$f(T) = \alpha \cdot NCC(I, J_T) + (1 - \alpha) \cdot FM(I, J_T)$$

其中 T 为空间变换参数, $\alpha \in [0, 1]$ 为权重系数, $NCC(I, J_T)$ 为配准后浮动图像 J_T 与参考图像 I 的归一化互相关系数, $FM(I, J_T)$ 为特征匹配相似度。

本文的目标为最大化 $f(T)$, 即优化 T 使配准后图像的灰度相似性和特征相似性均最优。

(二) 约束条件设计

根据图像配准的实际需求, 设计以下四种约束条件。

1. 几何变换约束

几何变换约束用于限制空间变换的类型, 根据实际应用场景选择对应的变换模型, 并对变换参数施加约束。以刚性变换为例, 变换参数需满足旋转矩阵的正交性约束, 即 $g_1(T) = a_1^2 + a_2^2 - 1 = 0$, 其中 $a_1 = \cos \theta$, $a_2 = \sin \theta$, θ 为旋转角度。该约束保证了变换过程中图像的形状和大小不变。

2. 平滑约束

平滑约束用于限制图像的局部形变, 避免配准过程中出现过

度形变或锯齿状失真，尤其适用于非刚性配准场景。采用二阶数平滑约束，表达式为：

$$g_2(T) = \iint \left(\left(\frac{\partial^2 J_T(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 J_T(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy - C \leq 0$$

其中 C 为平滑阈值，调节允许形变的程度。

3. 灰度一致性约束

灰度一致性约束用于保证配准后对应像素的灰度值具有合理性，避免出现灰度突变。对于单模态图像配准，约束配准后浮动图像与参考图像的灰度差值在一定范围内，表达式为：

$$g_3(T) = \max_{(x, y)} |I(x, y) - J_T(x, y)| - \varepsilon \leq 0$$

其中 ε 为根据图像噪声与灰度范围确定的灰度差值阈值。

4. 特征匹配约束

特征匹配约束用于保证配准后特征点对的空间一致性，避免出现错误匹配，表达式为：

$$g_4(T) = \max_{k=1, \dots, K} p'_k - T(p_k)_2 - \delta \leq 0$$

其中 p_k 、 p'_k 分别为浮动与参考图像匹配特征点坐标， δ 为映射误差阈值。

（三）基于拉格朗日乘数的优化模型构建

结合目标函数与约束条件，构建基于拉格朗日乘数的多约束图像配准优化模型。最大化目标转化为 $\min -f(T)$ ，引入乘数 λ_1 （几何变换等式约束）、 λ_2 、 λ_3 、 λ_4 （平滑、灰度一致性、特征匹配不等式约束不等式约束），构建拉格朗日函数：

$$L(T, \lambda) = -f(T) + \lambda_1 g_1(T) + \sum_{i=2}^4 \lambda_i g_i(T)$$

根据拉格朗日乘数法与 KKT 条件，最优解需满足以下条件：

- （1）一阶最优性条件： $\nabla_T L(T, \lambda) = 0$ ；
- （2）等式约束可行性条件： $g_1(T) = 0$ ；
- （3）不等式约束可行性条件： $g_i(T) \leq 0, i = 2, 3, 4$ ；
- （4）互补松弛条件： $\lambda_i g_i(T) = 0, i = 2, 3, 4$ ；
- （5）非负性条件： $\lambda_i \geq 0, i = 2, 3, 4$ 。

（四）最优解求解过程

基于上述优化模型，采用梯度下降法^[9]求解最优变换参数 T ，求解过程如下：

步骤1：初始化变换参数 T_0 （如初始旋转角度为0，平移量为0）、拉格朗日乘数 λ_0 （ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 初始值均为0）、学习率 η 、迭代次数阈值 N 和收敛精度 ε 。梯度下降法的收敛速度和最终精度高度依赖于学习率 η 和拉格朗日乘数更新步长 μ 等参数的设置。研究表明，这些参数的选择策略直接影响算法能否跳出局部最优并稳定收敛^[10]。

步骤2：计算当前变换参数 T_k 对应的拉格朗日函数值 $L(T_k, \lambda_k)$ ，并计算 L 对 T 的梯度 $\nabla_T L(T_k, \lambda_k)$ 。

步骤3：根据梯度下降法更新变换参数： $T_{k+1} = T_k - \eta \cdot \nabla_T L(T_k, \lambda_k)$ 。

步骤4：更新拉格朗日乘数：对于等式约束的 λ_1 ，根据 $g_1(T_{k+1})$ 更新， $\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + \mu \cdot g_1(T_{k+1})$ （ μ 为更新步长）；对于不等式约束的 $\lambda_i (i = 2, 3, 4)$ ，根据 KKT 互补松弛条件更新， $\lambda_i^{k+1} = \max(0, \lambda_i^k + \mu \cdot g_i(T_{k+1}))$ 。

步骤5：判断是否满足收敛条件：若 $\|T_{k+1} - T_k\| < \varepsilon$ 或迭代次数 $k+1 \geq N$ ，则停止迭代，输出最优变换参数 $T^* = T_{k+1}$ ；否则，令 $k = k+1$ ，返回步骤2。

步骤6：根据最优变换参数 T^* ，对浮动图像进行重采样与插值，得到配准后的图像。

求解过程中，通过调节学习率 η 和更新步长 μ ，可平衡收敛速度与求解精度。为避免陷入局部最优解，可采用多次初始化不同初始值的方式，选择最优迭代结果作为最终变换参数。

三、应用特性分析

（1）约束的灵活性与可扩展性：拉格朗日乘数法框架允许以加性形式集成多种约束，如几何变换约束、平滑约束、灰度一致性约束和特征匹配约束可纳入一个拉格朗日函数。这使得模型能依具体场景增删或修改约束条件，灵活性强。

（2）精度与合理性的平衡机制：拉格朗日乘数 λ_i 是“权衡调节器”，其大小反映对应约束在优化中的“严格程度”或“重要性”。迭代求解时，若某约束被严重违反（ $g_i(x)$ 较大），其对应 λ_i 乘数增大，在梯度下降方向强化该约束贡献，实现配准精度与结果物理合理性的自动平衡。

（3）提供理论可解释的优化路径：与端到端黑箱深度学习配准方法相比，该模型理论可解释性强。优化遵循 KKT 条件，迭代更新方向可分解为目标函数梯度与各约束函数梯度的线性组合，权重是拉格朗日乘数。这为分析算法行为、调试参数及理解最终结果为何满足某些特性提供了数学依据，其有效性已在多种图像配准场景中得到验证，例如，有研究将超图约束与改进的归一化互相关方法相结合，用于提升配准精度和算法适应能力^[10]。

综上，拉格朗日乘数法为多约束图像配准提供数学建模基础，其衍生的灵活性、平衡性、正则化能力、可解释性及算法兼容性等特性，使其成为处理复杂配准任务的强大实用工具。

参考文献

- [1] 张鑫. 基于深度学习的多模态脑部图像配准算法研究 [D]. 河南工业大学, 2023.
- [2] 寇俊阳, 邹小波, 毛磊. 光学影像配准和相关性分析方法 (COSI-Corr) 在地表形变监测中的应用综述 [J]. 地震科学进展, 2025, 55(04): 187-196.
- [3] 李佳骏. 基于局部特征的图像与点云配准研究 [D]. 大连理工大学, 2021.
- [4] 温宇昕. 基于深度学习的红外与可见光图像配准与融合算法研究 [D]. 中国科学院大学 (中国科学院西安光学精密机械研究所), 2025.
- [5] 李博瀚. 多光谱图像配准中局部特征表示算法研究 [D]. 北京邮电大学, 2025.
- [6] 师尚杰, 李文德, 闫浩文, 等. 图对比学习支撑下的矢量建筑物形状相似性度量 [J]. 地球信息科学学报, 2024, 26(12): 2659-2672.
- [7] 舒孝珍. 拉格朗日乘数法的应用探究 [J]. 内江科技, 2020, 41(09): 42-43.
- [8][1] 黄晓美, 唐国吉. 区间值优化问题的 KKT 和弱互补近似 KKT 条件 [J]. 数学物理学报, 2023, 43(06): 1897-1913.
- [9][1] 郭园, 赵忠峰, 杨党锋, 等. 基于梯度下降法的大房郢水库洪水预报模型参数率定及适用性研究 [J]. 南水北调与水利科技 (中英文), 2024, 22(S1): 10-16.
- [10] 朱明, 姚强, 唐俊, 等. 超图约束和改进归一化互相关方法相结合的图像配准算法 [J]. 国防科技大学学报, 2019, 41(03): 50-55.