函数极限定义的探索与研究

蒋帅，邓春华，李漫

淮阴工学院 数理学院，江苏 淮安 223003

DOI: 10.61369/RTED.2025290002

摘　　要： 函数极限是高等数学的核心基础概念，是连接初等数学与高等数学的关键桥梁，其定义的严谨性与抽象性既是教学的重点，也是学生理解的难点。本文对函数极限$\varepsilon-\delta$定义进行了探索与研究，对定义的前提条件进行了解析，并举例说明其重要性。此外，还从几何意义的角度对定义进行解析，了解其动态特征，便于初学者理解、准确把握极限思想。

关 键 词： 极限；邻域；极限的动态特征；精度

Exploration and Research on the Definition of Function Limits

Jiang Shuai, Deng Chunhua, Li Man

Faculty of Mathematics and Physics, Huaiyin Institute of Technology, Huai'an, Jiangsu 223003

Abstract: The function limit is a core fundamental concept in advanced mathematics and a key bridge connecting elementary mathematics and advanced mathematics. The rigor and abstraction of its definition are not only the focus of teaching but also the difficulty for students to understand. This paper conducts exploration and research on the $\varepsilon-\delta$ definition of function limit, analyzes the preconditions of the definition, and illustrates its importance with examples. In addition, it parses the definition from the perspective of geometric meaning to understand its dynamic characteristics, which is convenient for beginners to comprehend and accurately grasp the limit thought.

Keywords: limit; neighborhood; dynamic characteristics of limit; precision

引言

高等数学的建立与发展始终围绕“极限”这一核心概念展开，导数、积分、级数等重要内容均以函数极限为理论基石。从数学发展历程来看，函数极限定义的演变经历了从直观描述到严格抽象的过程，早期的“无限接近”等直观表述虽易于理解，但缺乏逻辑严谨性，无法满足数学推理的严格要求。在当前高等数学教学中，函数极限定义是学生接触的第一个抽象性较强的核心概念。因此，深入探索函数极限定义具有重要意义。

一、极限思想概述

极限思想是近代数学发展中一个极其重要的思想，高等数学中一系列的重要概念，如函数的连续性、可导性、定积分、重积分、曲线积分、曲面积分以及级数等概念都是借助于极限来定义的，可以说极限是微积分的基石，极限理论的发展推动了微积分的完善和进一步发展。

极限是连接初等数学和高等数学的桥梁，理解函数极限的定义，掌握极限的数学思想方法是学好高等数学的基础。瞬时速度、曲边梯形的面积、圆盘的转动惯量、曲线型构件的质量[1]等问题用初等数学的方法无法解决，需要从思想上改变，运用极限的思维解决上述复杂问题。同时，深刻理解极限定义对后续微积分等内容的学习也具有至关重要的作用。

以当x趋于x_0，$f(x)$以常数a为极限（$x\to x_0$时　$f(x)\to a$）为例，用$\varepsilon-\delta$语言给出极限定义如下。

定义1[2]：设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数a，对任意给定的正数ε，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有不等式$|f(x)-a|<\varepsilon$恒成立，那么常数a就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$。

上述定义比较抽象，对于初学者来说难以理解，将从以下几个方面进行探讨：

1.“函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义”的理解。

$x\to x_0$指的是x无限接近且永远不能到达x_0，因此函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限考虑的是在x_0的附近趋向于x_0时函数值的变化趋势，无需考虑函数在x_0处及远离x_0时函数的取值情况。首先要理解极限是一个局部的概念，观察的是自变量在x_0的附近

基金项目：淮阴工学院引进人才启动基金（Z301B23521）

作者简介：

蒋帅（1991—），男，安徽宿州人，博士，淮阴工学院数理学院讲师，主要从事非线性泛函分析研究；

邓春华（1980—），男，江苏东台人，博士，淮阴工学院数理学院教授，主要从事非线性泛函分析研究。

趋向于 x_0 时函数值的变化趋势，无需考虑远离 x_0 处的函数值。其次，极限是在动态变化的过程中，所捕捉到的一种恒定不变的趋势，这个变化趋势与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取值无关，变化过程是 x 趋向于 x_0，而不是达到 x_0，定义中 $0<|x-x_0|$ 确保这一特性。例如 $f_1(x)=x^2,x\in R$ 且 $x\neq 0$；$f_2(x)=\begin{cases}x^2,x\neq 0,\\ y_0,x=0,\end{cases}$ 其中 $y_0\neq 0$；$f_3(x)=x^2,x\in R$。显然，这三个函数在 $x_0=0$ 处的定义不同，但它们在 x 趋向于 0 时的趋势完全一致，即极限为 0。由此可见，函数 $f(x)$ 只要求在某一去心邻域 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义即可，对邻域的半径 δ 没有要求，其只需是一个很小的正数。

例1：讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 在 $x\to 0$ 的极限。

解错误解法：由于 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，令 $x\sin\dfrac{1}{x}=t$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$。

分析：令 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。根据数列极限的定义，对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-0|<\varepsilon$，即从数列的第 $N+1$ 项起都落在 $U(0,\varepsilon)$ 内，而函数 $\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 的分母 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在这些项的取值为0，这说明任意邻域 $U(0,\varepsilon)$ 无论多么小，都有无穷个使得 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 为0的点，不可能作为函数的定义域。因此上述解法错误之处在于不满足定义1中“$f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义”这一极限存在的前提。故该极限不存在。

2. 几何角度对 $\varepsilon-\delta$ 定义的理解。

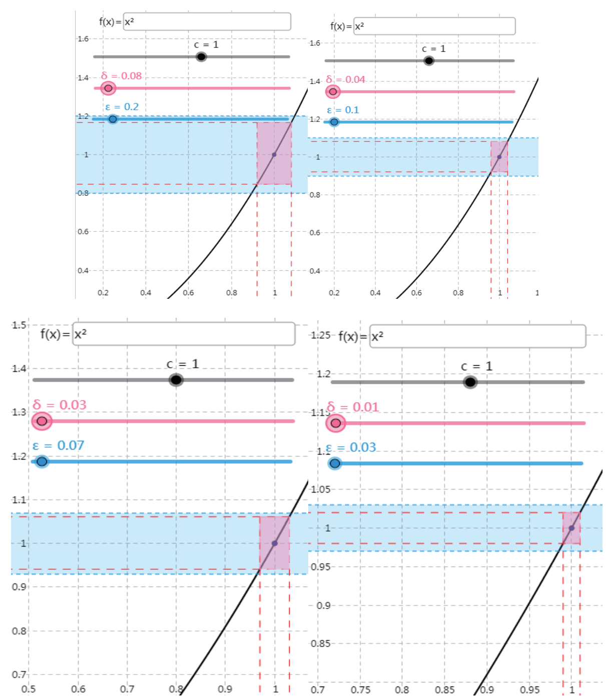
1821年法国数学家柯西在《分析教程》中提出了用不等式来刻画极限定义的方法，随后德国数学家魏尔斯特拉斯进一步完善并给出了极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，使得对极限概念有了精确的描述，其关键是通过使用 $\varepsilon-\delta$ 方法来说明“趋近于”和“接近于”这些概念。

定义中 ε 的任意性是指我们对 ε 的选择具有灵活性，不等式 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 的几何意义是函数值 $f(x)$ 处于以 a 为中心 ε 为半径的邻域内，ε 是一个正数，表示函数 $f(x)$ 的取值与极限 a 的差异的上限，ε 越小说明 $f(x)$ 越逼近 a，从图像上看 $f(x)$ 介于 $y=a-\varepsilon$ 和 $y=a+\varepsilon$ 之间。从极限定义知，对任意充分小的正数 ε，可以选择足够小的 δ，当 x 落在 x_0 的去心邻域 $U^{\circ}(x_0,\delta)$ 内时，我们可以控制函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的取值与 a 的差异在 ε 的范围内，这意味着函数 $f(x)$ 在 x_0 点处有一个稳定的水平，图像在该点附近不发生剧烈的波动。

3. $\varepsilon-\delta$ 定义的动态特征 [3]。

$\varepsilon-\delta$ 定义本质上是一种用于描述函数极限的动态方法。它基于 ε 和 δ 两个符号，用来表达函数值和自变量之间的关系。具体动态过程如下：首先选取一个正数 ε，表示函数值 $f(x)$ 与极限值 a 之间差的精度，一般来说，我们希望 ε 足够小，接近于零，以确保 $f(x)$ 能够足够接近 a；找到对应的 δ，表示我们对自变量 x 与 x_0 之间距离的要求，确保 $f(x)$ 与 a 之间的距离始终小于 ε。这种动态的 $\varepsilon-\delta$ 定义要求控制自变量 x 与 x_0 之间的距离，并通过逐渐减小这个距离来确保函数值 $f(x)$ 与极限值 a 之间的差足够小。当要求更高的精度时，需要选择更小的 ε，进而要求更小的 δ 值。总之，$\varepsilon-\delta$ 的动态描述涉及到选择适当的 ε 和调整相应的 δ，以确保函数值与极限值之间的距离满足精度要求。

以函数 $y=x^2$ 当 $x\to 1$ 的极限为例，使用数学软件 Geogebra 分别绘制了精度要求为 $\varepsilon=0.2、0.1、0.07、0.03$ 四种情况下 δ 的选取，如下图所示，δ 分别取值为 $0.08、0.04、0.03、0.01$。显然精度要求越高，δ 越小。但 δ 的选取不唯一，我们希望同一精度下 δ 越大越好，这保证了更大范围内函数值与极限值关系的稳定性。



函数极限定义对于理解函数的连续性、导数以及积分等数学概念至关重要。它为我们提供了一种准确的方法来描述和分析函数的局部行为，有助于解决各种数学问题，以及推导出一些重要的数学定理和性质。

二、函数极限定义在极限存在性判定中的核心作用

极限定义不仅是描述极限的工具，更是判定极限是否存在的根本依据。根据极限定义，若要证明某函数在某点的极限不存在，只需证明：不存在一个固定的目标值，使得无论提出多么严格的逼近要求，总能找到一个足够接近目标点的范围，使此范围内所有的函数值与那假设的目标值都满足所要求的逼近关系。两种常见不存在极限的情形可归结为两大类：一类是在自变量变化过程中，函数值无限振荡；另一类则是函数值趋近于不同的数值（即左右极限不相等）。极限严格定义中也涉及了对无穷小、无穷大概念的认识。无穷小是指极限为0的变量，它可以表述为函数极

 |

限的形式：若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ ，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小 [4]。事实上，当自变量趋近于某一确定值（或无穷远）时，若函数的极限恰好为0，那么这个函数就叫做自变量趋近于该确定值（或无穷远）时的无穷小。这样就把“无穷小”的概念由模糊的“无限小的量”，变成了可以精确分析的数学术语，从而可以用极限定义严格地把握住无穷小量的运算性质，如“有限个无穷小之和仍为无穷小”“有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小”等，都需要利用极限定义中“任给、存在”的逻辑关系进行推证 [5]；对于无穷大，同样可以利用极限的思想，将“无穷大”的概念由模糊的“无穷大的量”，转化成可以精确分析的数学术语。无穷大的概念是指当自变量趋近于某一值（或无穷远）时，函数值的绝对值可以大于任意预先给定的正数。它可以表述为函数极限的形式：$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ ，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大。

从数学思想演化的角度看，极限理论中“逼近性和精确性的矛盾统一”是数学发展中重要的思维变革，主要体现在：初等数学以精确数和精确关系为对象，但高等数学常常借助于极限理论可由近似转化为精确而达到由粗到细的飞跃。这样的思维方式不仅在数学中存在，在物理、科学技术工程的各个领域都是一个解决问题的基本想法——“近似问题精确化”，是其重要思维方法和技术手段 [6]。

三、函数极限定义教学对策

1. 立足直观感知

抽象的知识是建立在形象认识的基础上的，函数极限定义的教学应避免直接抛 ε−δ ε −X 语言，在教学中并不是直接给学生们讲授抽象概念，在具体实例的基础上引导他们从直观到严格地给出定义。选取与学生原有认知水平相适应的例子，如自由下落物体的瞬时速度、曲边梯形的面积等来体会“无限趋近”的现象的确存在，由此了解为什么要引入极限的概念。通过具体函数图像和数值表格辅助教学，例如分析函数 $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$ 当 x 接近1时的函数值变化，通过表格列出 x 分别为1.1、1.01、1.001⋯时的 $f(x)$ 值，让学生直观看到 $f(x)$ 无限接近2的趋势；再结合函数图像，清晰呈现“ x 越接近1， $f(x)$ 越接近2”的变化规律 [7]。

2. 拆解逻辑层次

ε−δ ε −X 语言的逻辑关系复杂，是学生理解的核心难点，教学中需将定义拆解为多个逻辑层次，逐一讲解并强化理解。首先，明确定义中各符号的含义：重点讲解 ε 的“任意性”与“确定性”、δ（或 X ）的“存在性”与“依赖性”，通过提问“ ε 为什么要任意给定？”“ δ 为什么依赖于 ε ？”等问题，引导学生深入思考符号背后的逻辑意义。其次，梳理定义的逻辑结构：将“对于任意 $\varepsilon>0$ ，总存在 $\delta>0$ ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$ ”拆解为“条件－结论”的逻辑链条，即“只要 x 满足与 x_0 的距离在 δ 范围内（且不等于 x_0 ），就一定能保证 $f(x)$ 与 a 的距离在 ε 范围内”，让学生明确各部分之间的逻辑关系。最后，通过反例强化理解：列举极限不存在的实例，如 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ ，分析为何无法找到对应的 δ 满足定义要求，让学生从反面理解极限存在的条件，进一步深化对定义内涵的把握 [8]。

3. 加强实践训练

将学习理论知识同实践练习结合起来，让学生经过有目的地训练熟练掌握函数极限定义以及理解函数极限的实质意义。首先，设计基础辨析题：给出具体的函数、极限值和 ε ，让学生尝试寻找对应的 δ 或 X ，例如“已知 $\lim_{x\to 2}(2x+1)=5$ ，对于 $\varepsilon=0.1$ ，求对应的 δ ”，通过这类练习让学生直观感受 ε 与 δ 的对应关系，掌握寻找 δ 或 X 的基本方法。其次，开展证明题训练。如证明 $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$ 、$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ 等，在证明简单函数的极限存在性中应用极限的定义以强化对极限定义逻辑体系的理解能力，从而提高他们的严密数学思维的能力 [9]。最后，结合后续知识关联训练。在学习导数定义时，引导学生回顾函数极限定义，分析导数本质上是一种特殊的函数极限，从而让学生更加体会到极限定义的重要性及根本性，建立相关知识点间的联系来强化他们对于定义的理解以及运用能力 [10]。

四、结语

综上所述，函数极限定义作为近代数学的重要基石，其严谨的逻辑结构、深刻的思想内涵以及广泛的应用价值，决定了它在高等数学乃至整个数学体系中的核心地位。函数极限定义是高等数学的基础核心概念，其严谨的逻辑体系既是数学学科的本质特征，也是教学中的重点难点。在教学实践中，还需结合学生的认知特点，不断优化教学方法，让学生真正理解极限思想的核心，为后续高等数学知识的学习奠定坚实基础。

参考文献

[1] 翟忠信，龚东山 . 高等数学的教与学 [J]. 高等理科教育，2004 (6):29—34.
[2] 同济大学数学系 .《高等数学》上册 [M]. 北京：高等教育出版社，2014.
[3] 王芳 . 2012. 数列极限定义的等价定义及其作用 [J]. 黑龙江科技信息，（15）:195.
[4] 杨春风，卢佳佳，陈慧玉，等 . 一类函数极限定义的类比探究式教学案例 [J]. 高等数学研究 ,2024,27(02):11-15+83.
[5] 陈尧尧，王昊 . 两类常见二元函数重极限不存在的证明方法 [J]. 高等数学研究 ,2024,27(02):72-73+75.
[6] 郭蒙，薛小强 . 高观点视角下的函数极限保不等式性问题及高考应用 [J]. 中学数学研究 (华南师范大学版),2024,(05):10-14.
[7] 王耀革，郭从洲，孙铭娟 . 极限概念的定量化思想——从数列极限的定量化定义谈起 [J]. 高等数学研究 ,2023,26(04):64-65+110.
[8] 姚元金 . 浅谈用定义证明数列极限的教学体会 [J]. 现代职业教育 ,2020,(32):212-213.
[9] 张艳妮 . 数列极限的定义在微课教学中的设计 [J]. 科技创新导报 ,2019,16(33):207-208.DOI:10.16660/j.cnki.1674-098X.2019.33.207.
[10] 赵海霞，荣继红，林昕茜 .《高等数学》上册教学模式探讨 [J]. 科技视界 ,2016,(10):52+60.DOI:10.19694/j.cnki.issn2095-2457.2016.10.032.