

解析几何中最值问题的解题策略归纳与拓展

肖丹丹

井冈山大学附属中学，江西 吉安 343009

DOI: 10.61369/SSSD.2026010040

摘 要：解析几何是高中数学的核心模块，其涉及圆、椭圆、抛物线等曲线的最值问题，是考查学生数形转化能力的高频压轴题型，也是教学难点。此类问题的本质是依托坐标法实现几何与代数的互化，基于此，本文归纳出四大核心解题策略：依托曲线定义与几何定理简化运算、构建单变量函数模型转化代数最值、运用基本不等式与柯西不等式优化求解、借助参数方程降低变量复杂度。同时，结合教学实践提出三大对策：强化数形结合思想引领、按曲线类型构建问题体系、聚焦运算技巧突破解题瓶颈。本文旨在为教师提供具体的教学参考，帮助学生精准掌握解题方法，提升解析几何综合解题能力。

关 键 词：高中数学；解析几何；最值问题；解题策略；教学对策

Induction and Expansion of Problem-Solving Strategies for Maximum and Minimum Problems in Analytic Geometry

Xiao Dandan

The Affiliated High School of Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009

Abstract： Analytic geometry is the core module of senior high school mathematics, which involves the maximum value of curves such as circle, ellipse and parabola. It is a high-frequency finale question to test students' ability of number-shape transformation, and it is also a teaching difficulty. The essence of this kind of problem is to realize the reciprocity between geometry and algebra by coordinate method. Based on this, this paper summarizes four core problem-solving strategies: simplifying operation by relying on curve definition and geometric theorem, constructing univariate function model to transform algebraic maximum, optimizing solution by using basic inequality and Cauchy inequality, and reducing variable complexity by means of parametric equation. At the same time, combined with teaching practice, three countermeasures are put forward: strengthening the guidance of combining numbers with shapes, building a problem system according to curve types, and focusing on operational skills to break through the bottleneck of solving problems. This paper aims to provide specific teaching reference for teachers, help students master problem-solving methods accurately and improve their comprehensive problem-solving ability of analytic geometry.

Keywords： senior high school mathematics; analytic geometry; maximum and minimum problems; problem-solving strategies; teaching countermeasures

对于解析几何而言，其是数学“动态分析”的重要体现。它的核心价值在于依托坐标法来推动几何与代数问题的相互转化^[1]。近些年，随着新高考改革的持续推进，解析几何中最值问题作为考查学生数学综合能力与数学素养的重要题型，已经成为一个高频考点。该类题型经常以“压轴题”的方式出现，并有着入口宽、思路广、计算难等特点，导致学生在解题中遇到诸多困难。对此，深入分析解析几何中最值问题的解题策略，探索该类问题的有效教学策略既是提升学生数学综合能力的现实需求，也是推进数学核心素养教育的必经之路^[2]。

一、解析几何中最值问题的解题策略探讨

解析几何最值问题的本质在于几何问题与代数问题的相互转化，这一过程中如何科学选择转化路径，直接决定着学生的解题效率。而基于该类题型的特征，其具体的解题策略可以分为、几

何性质、函数模型、不等式以及参数方程这四个方面。

（一）依托几何性质，简化运算过程

在解析几何最值问题中，几何性质是一个重要的解题方向。可以看到，很多解析几何最值问题都可以通过几何定理以及回归曲线定义等知识点进行直接化解，这也能够让学生避免烦琐的代

数运算,从而提升其实际的解题效率^[3]。例如,在面对“椭圆一点到两焦点距离之和”的最值问题时,便可以从椭圆的定义角度着手,明确“平面内到两定点距离之和为常数的点的轨迹”这一性质,解析其实际属于定值,延伸问题可涉及焦点与定点距离之和的最值。同时,在距离差等相关最值问题时,则可以依托双曲线的数学定义来进行解题。而在圆的最值问题中,核心量是“圆心到直线的距离”。例如,圆A上有一点,其到直线距离的最值实际上可以转化为“圆心到直线距离 $\pm$ 半径”,这一过程是不许进行方程计算的;面对定点到动直线距离最值等问题,可以直接依托垂线段最短等相关几何定理来快速解题。例如,已知点A(1,2),圆C: $(x-3)^2+(y-4)^2=4$,求点A到圆C上点的距离的最值,可直接计算圆心C(3,4)与A的距离为 $\sqrt{[(3-1)^2+(4-2)^2]}=2\sqrt{2}$,半径 $r=2$,故最大值为 $2\sqrt{2}+2$,最小值为 $2\sqrt{2}-2$ 。在这个解题过程中,并没有运用到参数或者是联立方程,而是直接通过几何定理来进行解题操作,是典型的“以形助数”解题思路的体现。

(二) 构造函数模型,转化代数最值

通过构造函数模型来解决解析几何最值问题也是一个常见的解题思路,其核心在于通过设定变量,然后构建相应的表达式,在此基础上,依托函数模型来进行最值求解。其中,设定变量时,要充分考虑曲线类型,以此来选择针对性的变量设计^[4]。例如,在面对圆锥曲线和直线的交点类问题时,可以通过设定斜率、截距、动点坐标,然后基于曲线方程来进行消元处理,从而获得单变量数学函数。例如,在面对:抛物线 $y^2=4x$ 上一点P到点A(2,3)的距离的最小值这一问题时,可以设P(x,y),由抛物线方程得 $x=y^2/4$,距离表达式为 $PA=\sqrt{[(x-2)^2+(y-3)^2]}=\sqrt{[(y^2/4-2)^2+(y-3)^2]}$,令 $t=y$,转化为关于t的函数 $f(t)=(t^2/4-2)^2+(t-3)^2$,求导得 $f'(t)=2*(t^2/4-2)*(t/2)+2*(t-3)=t^3/4-t+2t-6=t^3/4+t-6$,令 $f'(t)=0$,解得 $t=2$,代入得最小值为 $\sqrt{[(4/4-2)^2+(2-3)^2]}=\sqrt{2}$ 。需要注意的是,在构造函数模型的解题策略中,应当基于实际的曲线方程与几何意义来明确变量的取值范围,以此来有效避免代数解和几何条件不符等问题。此外,在面对告辞函数以及二次函数时,可运用倒数法、顶点公式等来达到简化函数形式的目的。

(三) 运用不等式工具,优化最值求解

众所周知,不等式工具是解决代数最值问题的重要辅助。在面对解析几何最值问题时,应当充分运用基本不等式、柯西不等式等工具来保证解题的正确率和效率。首先,基础不等式的运用要注重“一正二定三相等”的基本原则,以此来解决距离乘积以及几何面积等相关的最值问题^[5]。例如,已知椭圆 $x^2/4+y^2/3=1$,A(1,0),过A的直线l交椭圆于M、N两点,求 $\triangle OMN$ (O为原点)面积的最大值。面对这一问题时,可以设直线l的方程为 $x=my+1$,联立椭圆方程得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-6m/(3m^2+4)$, $y_1y_2=-9/(3m^2+4)$,面积 $S=1/2*|OA|*|y_1-y_2|=1/2*\sqrt{[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=1/2*\sqrt{[(36m^2)/(3m^2+4)^2+36/(3m^2+4)]}=6\sqrt{(m^2+1)/(3m^2+4)}$ 。令 $t=\sqrt{(m^2+1)}\geq 1$,则 $S=6t/(3t^2+1)=6/(3t+1/t)$,由基本不等式 $3t+1/t\geq 2\sqrt{(3t*(1/t))}=2\sqrt{3}$,当且仅当 $3t=1/t$

即 $t=1/\sqrt{3}$ (舍去,因 $t\geq 1$),故需结合函数单调性, $3t+1/t$ 在 $t\geq 1$ 上递增,最小值为4,故S最大值为 $6/4=3/2$ 。其次,柯西不等式的运用主要集中在“线性表达式的平方和最值”等问题类型,如已知点BP(x,y)在圆 $x^2+y^2=1$ 上,求 $3x+4y$ 的最值,通过柯西不等式工具可以列出 $(3x+4y)^2\leq (3^2+4^2)(x^2+y^2)=25*1=25$ 这一数学公式,在此基础上,直接得出最终结果最值 ± 5 ,从而让计算更高效、更简洁^[6]。

(四) 借助参数方程,降低变量复杂度

在解析几何最值问题的解答过程中,参数方程也是一个有效的解题策略,主要适用于“曲线移动点”的最值问题^[7]。例如,针对椭圆类问题: $x^2/9+y^2/4=1$ 上一点P到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离的最小值。可以引入参数方程: $x=acos\theta$, $y=bsin\theta$ (θ 为参数)。其间,可以设 $P(3cos\theta,2sin\theta)$,则距离 $d=|2*3cos\theta+3*2sin\theta-6|/\sqrt{(2^2+3^2)}=|6cos\theta+6sin\theta-6|/\sqrt{13}=|6\sqrt{2}sin(\theta+\pi/4)-6|/\sqrt{13}$ 。当 $sin(\theta+\pi/4)=1$ 时,d取得最小值 $|6\sqrt{2}-6|/\sqrt{13}=6(\sqrt{2}-1)/\sqrt{13}=6(\sqrt{26}-\sqrt{13})/13$ 。通过此举来将传统的二元问题,转化为一元三角函数,然后通过其有界性($sin\theta,cos\theta\in[-1,1]$)来解析出最终答案,进一步降低变量复杂度,有效提高解题的效率与效果。

二、解析几何中最值问题的教学对策拓展

(一) 强化思想引领,夯实数形结合根基

数形结合作为数学的基本原则,是解析几何最值问题的核心思想。在教学过程中,教师应当积极培养学生的数形结合思维,让他们能够实现数与形之间的有效转化,从而培养他们“几何分析+代数运算”的解析几何最值问题解答思路。在具体的教学过程中,教师首先可以从“问题驱动”角度着手,通过一系列问题来引导学生数学思想的转变,帮助他们强化数与形的关系认知,促进他们解题能力的提高^[8]。例如,在“圆上点到直线的距离最值”的教学过程中,可以先让学生们思考并列出其中的距离公式,在此基础上,让学生说一说圆的几何特征、问题中源于直线位置受何影响以及如何推到点到直线距离最值等等,通过创设“递进式”“阶梯式”的问题链来促进学生循序渐进地理解和掌握,为他们数形结合思想的培养奠定坚实基础。其次,可以基于当前数字化时代背景,积极运用数字化手段和工具来推动解题教学。例如,在教学中,可以运用学生喜闻乐见的几何画板、数学软件等工具来展示曲线上点的运动轨迹,让学生们能够形象感知到其中的几何特征,进而在内心建构最值问题的模型。在此基础上,通过运用上述的一些解题策略来强化学生的数学认知,促进他们的正确与高效计算。

(二) 构建问题体系,促进方法融会贯通

对于解析几何最值问题而言,其本质上是规律可循的。在教学过程中,教师应当通过引导学生有效地梳理和科学地训练来强化他们的解题策略认知,提高他们的解题能力与数学综合能力^[9]。首先,可以组织学生基于曲线的类型,划分出抛物线、椭圆、圆以及双曲线等多个类型的解析几何最值问题题型,在此

基础上,与他们一同梳理总结相关策略的运用效率,使他们能够明白各种类型适合于什么解题策略,如函数模型适用于抛物线的问题解答;参数方程适用于圆的最值问题解答等,通过这样的共性问题梳理来帮助学生快速掌握各类解析几何最值问题的解答要点、解题策略。其次,在教学过程中,应当打造“开放式”的解题教学模式,允许和鼓励“一题多解”,如在椭圆最值问题的解题教学中,可以组织学生分别运用上述四种方法策略来进行解题,然后可以让学生说一说自己的收获,对比一下各个方法的优点和不足,培养他们的多维思考、主动探索意识,强化他们的解题能力。在此基础上,还应引导学生“多题归一”,即通过对各类解析几何最值问题的提炼来归纳出问题的本质,避免陷入“记忆题型”的误区之中,使他们的数学思维得到有效培养。再者,可以积极开展“变式训练”来促进学生解题能力的提升,如可以引用一些经典的解析几何最值问题题型,在此基础上,通过改变直线斜率、曲线参数以及定点位置等条件来进行变式处理,引导学生进行计算练习,以此来培养他们的思维创新性和发散性,进一步推动其解题该类题型思路和框架的确立,让他们的解题效果和数学综合能力都能够全面提升。

（三）聚焦运算能力，突破解题核心瓶颈

在解析几何最值问题的解答中，代数运算一直是学生比较“怕”的问题点，对此，教师应当基于这一现实情况展开针对性的解题教学训练，帮助他们熟练掌握相关策略与技巧，从而促进其解题效率和正确率的提高^[10]。首先，是本着“设而不求”的思想

来组织学生进行假设操作，培养他们的模型思维，强化他们对于解题思路和运算流程的认知。例如，在面对“直线与椭圆相交形成的弦长最值”这一类问题时，可以引导学生进行直接假设，如将交点坐标设为 (x_1,y_1) 、 (x_2,y_2) ，在此基础上，组织学生利用韦达定理来获取相关数值，然后引入弦长公式，从而有效避免具体交点坐标计算的问题，同时助力学生数学思维能力与模型素养的培养。其次，应当积极与学生探索“简化技巧”，帮助学生找到最快的解题路径。例如，在联立直线与圆锥曲线方程时，可以让学生从曲线方程的形式出发，科学选择截距式、斜截式以及点斜式等方程，通过此举来避免高次项系数以及复杂系数计算；在三角函数表达式的计算中，组织学生对辅助角公式进行转化，然后依托其有界性来快速计算数值和得出答案。此外，教师也应引导学生相互之间交流和学习，如组织学生小组之间进行解析几何最值训练和反思，通过对比互评等方式来带领大家找到最佳的运算流程，简化和规范他们的解题步骤，从而提高他们的解题效率和正确率，让他们能够顺利突破该类题型运算的核心瓶颈。

总之，解析几何最值问题作为高中数学教学中的重要模块，直接考察了学生的综合运用能力与数学素养。为了更好地推动学生数学思维、问题解决能力与运算能力的培养，教师应当本着“素质导向”思路，一方面充分做好解题策略的教学工作，帮助学生强化解题思路；另一方面通过有效的教育引导来提升学生的解题能力，从而为他们数学能力与素养的培养奠基，助力他们在未来更好地学习、成长和发展。

参考文献

[1] 龚才权. 圆锥曲线中简单的最值问题、探索性问题 [J]. 新世纪智能, 2024, (94): 45-46.
[2] 章珍. 构建方程求最值, 数形结合探本质 [J]. 中学数学研究, 2024, (11): 39-41.
[3] 高娜. 圆锥曲线最值(取值范围)问题的应对策略 [J]. 中学数学, 2024, (19): 115-116.
[4] 王东海, 黄振东. 探究一道圆锥曲线中三角形面积的最值问题 [J]. 数理化学学习(高中版), 2024, (10): 38-41.
[5] 王助创. 破解圆锥曲线最值问题的三种策略 [J]. 数理天地(高中版), 2024, (19): 8-9.
[6] 张夏强. 圆锥曲线中最值问题的策略探究 [J]. 数学之友, 2024, (17): 67-70.
[7] 吴丽燕. 圆锥曲线最值问题的解法探究与教学策略 [J]. 高中生学习, 2024, (S1): 32-33.
[8] 张刚. 圆锥曲线中最值问题的求解策略 [J]. 数理天地(高中版), 2024, (15): 21-23.
[9] 吴颖. 浅谈高三数学复习教学如何提升直观想象能力——以“圆锥曲线的最值问题”教学为例 [J]. 中学数学教学参考, 2024, (21): 64-65.
[10] 任艳艳. 全国高中数学联赛中最值问题教学研究 [D]. 湖南科技大学, 2024.