

# 利用 GeoGebra 直观探索与理解介值定理

王兵, 杨晓丹

航天工程大学 基础部, 北京 101416

DOI: 10.61369/RTED.2025220036

**摘要** : 本文旨在通过 GeoGebra 这一强大的数学软件平台, 直观探索并深入理解数学分析中的基本定理之一——介值定理。介值定理是连续函数与实数集它们的性质之间的重要桥梁, 它表明如果一个连续函数在区间的两端取值不同, 则该函数在该区间内至少取得这两个值之间的任何值。本文利用 GeoGebra 的动态绘图与交互功能, 通过实例演示和直观分析, 帮助学生和研究者更好地掌握介值定理的概念、应用及其背后的几何与代数意义。

**关键词** : GeoGebra; 介值定理; 连续函数; 实数集

## Exploring and Understanding the Intermediate Value Theorem Intuitively with GeoGebra

Wang Bing, Yang Xiaodan

Department of Basic Sciences, Space Engineering University, Beijing 101416

**Abstract** : This article aims to explore and deeply understand one of the fundamental theorems in mathematical analysis – the intermediate value theorem – through the powerful mathematical software platform GeoGebra. The intermediate value theorem is an important bridge connecting the properties of a continuous function and a set of real numbers. It states that if a continuous function takes different values at both ends of an interval, then the function takes at least one value between the interval. This article utilizes the dynamic drawing and interactive functions of GeoGebra to demonstrate and analyze through examples, helping students and researchers better grasp the concept, application, and geometric and algebraic meanings behind the intermediate value theorem.

**Keywords** : GeoGebra; intermediate value theorem; continuous functions; real number set

### 引言

介值定理是微积分学乃至整个数学分析领域的基石之一, 它不仅在理论证明中发挥着关键作用, 也是解决实际问题的重要工具。然而, 由于其抽象性和逻辑性较强, 初学者往往难以直观把握其本质。GeoGebra 作为一款集代数、几何、统计等多种功能于一体的开源数学软件, 以其直观、动态的演示能力, 为介值定理的教学与学习提供了全新的视角和工具。本文旨在通过 GeoGebra 的应用, 使介值定理的学习过程更加生动有趣, 帮助学生从直观感受上升到理性认识<sup>[1]</sup>。

### 一、介值定理的基本概念回顾

介值定理是微积分学中的一个基本定理, 它在数学分析、函数理论等领域具有举足轻重的地位。介值定理的应用广泛, 如在证明函数的性质、求解方程等领域都有着重要作用, 同济版高等数学中关于介值定理的内容为<sup>[2,3]</sup>: 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值  $f(a) = A$  及  $f(b) = B$ , 那么, 对于  $A$  与  $B$  之间的任意一个数  $C$ , 在开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = C$  ( $a < \xi < b$ )。即在闭区间上连续的函数必取得介于区间端点处的函数值之间的任何值。换句话说, 闭区间  $[a, b]$  上的连续函数将会取到介于其端点函数值之间的所有数值。

这种表述虽然精确, 但对于初次接触高等数学的学生来说, 可能对“在闭区间上连续的函数必取得介于区间端点函数值之间的任何值”这一说法, 会感到困惑。理解这个定理的直观含义并不容易, 因为它涉及到函数在区间内的行为, 而这种行为在静态的数学表达式中并不容易展现。通常, 为了证明介值定理的正确性, 我们会借助零点定理, 这是一种证明策略, 但它本身也需要一定的抽象思维能力。对于许多学生来说, 仅仅通过符号推导来理解介值定理的内容是具有挑战性的, 因为这种推导过程往往难以在脑海中形成清晰的图像。为了克服这一障碍, 我们可以通过 GeoGebra 等数学软件来可视化介值定理。

作者简介:

1. 杨晓丹, 女, 教授, 主要从事大学数学课程教学研究。

2. 王兵, 男, 讲师, 主要从事大学数学课程教学研究。

## 二、重塑介值定理关键点与 GeoGebra 的融合策略

我们需要明确介值定理的核心思想：连续曲线弧  $y=f(x)$  与水平直线  $y=C$  至少相交于一点。基于这一原理，我们可以设计一个 GeoGebra 的教学策略来融合这一概念。首先，可以在 GeoGebra 中绘制一个连续函数的图像，并在图像上选择两个端点。通过调整这两个端点的函数值，使得它们不同，从而直观地展示介值定理的前提条件。接着，在 GeoGebra 中绘制一条水平直线，并将其与函数图像进行比较。通过调整水平直线的位置，使其介于两个端点的函数值之间，学生可以直观地观察到至少存在一个交点，从而理解介值定理的核心内容<sup>[4-6]</sup>。

具体实施策略如下：

步骤 1：定义一个闭区间上的连续函数。例如，定义一个  $[-1,4]$  上的连续函数  $f(x)=x^3-4x^2+1$ 。

步骤 2：计算出区间断点处的函数值  $A=f(-1)=-4, B=f(4)=1$ 。

步骤 3：设置滑动条 C，使取值位于 A、B 之间。

步骤 4：绘制直线  $y=C$ ，并求直线与曲线的交点。

步骤 5：绘制交点的横坐标。

步骤 6：动态演示。当滑动条的值改变时，观察 C 取值变化和交点横坐标的变化。

通过这种融合 GeoGebra 的教学策略，介值定理的教学变得更加直观和生动。学生不仅能够直观地看到定理的表述，还能够通过实际操作来探索和验证定理的正确性，从而更深刻地理解和掌握这一重要的数学概念<sup>[7]</sup>。

## 三、用 GeoGebra 动态展示详细制作过程

1) 启动 GeoGebra 软件，分别打开绘图区、代数区。

2) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入： $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 。如果  $(-1 \leq x \leq 4, x^3 - 4x^2 + 1)$ 。

说明：绘制闭区间  $[-1,4]$  上的连续函数  $f(x)=x^3-4x^2+1$  的曲线，进一步的可以调整曲线的属性来改变曲线的粗细与颜色（图1）。

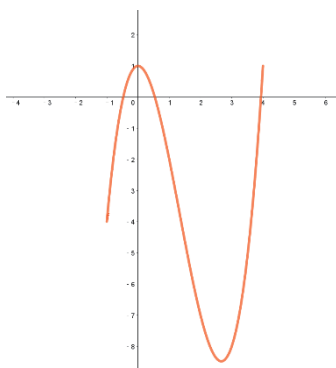


图1 闭区间  $[-1,4]$  上的连续函数  $f(x)=x^3-4x^2+1$

3) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入： $A=(-1, f(-1))$

说明：绘制闭区间  $[-1,4]$  左端点  $-1$  处的函数值对应的曲线上的点  $A=(-1, f(-1))$ ，进一步调整点 A 的属性改变点 A 的大小和颜色。

4) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入： $B=(4, f(4))$ 。

说明：绘制闭区间  $[-1,4]$  右端点  $4$  处的函数值对应的曲线上的点  $B=(4, f(4))$ ，进一步调整点 A 的属性改变点 A 的大小和颜色。

5) 点击工具栏上的 ，在绘图区建立滑动条 C，在出现的滑动条属性框中（图2）进行最小值和最大值的设置，这里最小值设置为  $f(-1)$ ，最大值设置为  $f(4)$ ，增量  $0.1$ ，也可以根据演示的需要设置更小的增量。

说明：用于体现位于区间端点函数值之间的任意常数。



图2 滑动条的属性

6) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入： $y=C$

说明：绘制直线  $y=C$ 。可根据演示需要调整直线  $y=C$  的属性，设置直线的粗细和颜色。

7) 点击工具栏上描点按钮 ，下拉选择交点按钮（图3），然后单击直线绘图区中的曲线  $y=C$  和  $f(x)=x^3-4x^2+1$ ，得到两条曲线的所有交点。



图3 描点按钮

说明：绘制曲线  $y=C$  和  $f(x)=x^3-4x^2+1$  交点，不妨将得到的交点依次按英文字母的顺序明名为： $D, E, F$ 。

8) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入： $D_1=(x(D), 0)$

说明：交点 D 在坐标轴 X 轴上的投影，即找到点 D 的横坐标。这里可以设置属性将颜色与大小调整的与点 D 一样。

9) 英文状态下，在指令栏中输入： 输入： $E_1=(x(E), 0)$

说明：交点 E 在坐标轴 X 轴上的投影，即找到点 D 的横坐标。

这里可以设置属性将颜色与大小调整的与点 E 一样。

10) 英文状态下, 在指令栏中  输入:  $F_1=(x(F),0)$

说明: 交点 F 在坐标轴 X 轴上的投影, 即找到点 D 的横坐标。这里可以设置属性将颜色与大小调整的与点 F 一样。

11) 英文状态下, 在指令栏中  输入: 线段 (D,D\_1)

说明: 绘制链接点 D 与 D\_1 的线段, 并设置属性改变粗细和线型, 比如调整为虚线, 这样便于观察交点的横坐标。

12) 英文状态下, 在指令栏中  输入: 线段 (E,E\_1)

说明: 绘制链接点 E 与 E\_1 的线段, 并设置属性改变粗细和线型, 比如调整为虚线, 这样便于观察交点的横坐标。

13) 英文状态下, 在指令栏中  输入: 线段 (F,F\_1)

说明: 绘制链接点 F 与 F\_1 的线段, 并设置属性改变粗细和线型, 比如调整为虚线, 这样便于观察交点的横坐标。

完成以上设置, 通过使用滑动条来动态调整参数, 我们可以观察到随着 C 取值的变化, 直线  $y=C$  与曲线  $f(x)=x^3-4x^2+1$  交点对应横坐标的变化情况 (如图 4 所示), 这样设计生动地展示了介值定理的核心内容: 只要参数 C 的值在 A 和 B 之间变化, 那么在闭区间上必然存在至少一个点, 其函数值恰好等于 C 的当前值。这种交互式的可视化手段, 不仅极大地提升了学生对介值定理的理解, 还激发了他们对数学探索的兴趣。学生可以通过自己动手操作滑动条, 观察不同 C 值下交点的变化, 从而更深刻地体会到介值定理的普遍性和重要性。这种学习方式打破了传统教学中抽象和静态的局限, 使得数学概念变得生动和易于接近。

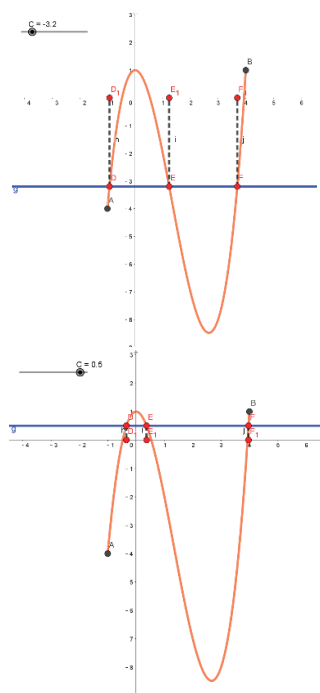


图 4 介值定理几何展示

## 四、总结

GeoGebra 的动态特性为数学教学提供了一个强大的工具, 它允许学生通过实际操作来探索和理解介值定理。在这个过程中, 学生可以自由地改变函数的表达式、调整端点的位置, 或者移动水平直线, 从而观察到图像随之发生的变化。这种互动性的教学方式, 不仅使学习过程更加有趣, 而且有效地促进了学生对数学概念的深入理解。通过 GeoGebra, 学生可以直观地看到, 当函数表达式改变时, 其图像如何相应地变化, 这有助于他们理解函数与图像之间的关系。例如, 当学生改变二次函数的系数时, 他们可以观察到抛物线开口的大小和方向如何随之改变, 这种直观的体验比单纯的理论讲解更加生动和深刻<sup>[8]</sup>。同样, 当学生调整端点的位置时, 他们可以立即看到函数图像在不同区间上的表现, 以及这些变化如何影响介值定理的适用性。这种动态的探索过程, 使得学生能够更加直观地理解闭区间上连续函数的性质, 以及介值定理的前提条件。此外, 通过移动水平直线, 学生可以观察到它与函数图像的交点如何随着直线位置的变化而变化。这种操作不仅帮助学生理解了介值定理的直观含义, 即在函数值的两个不同值之间, 必然存在一个点使得函数值等于任意给定的介于这两个值之间的数, 而且还激发了他们对数学探索的兴趣。这种互动性的教学方法, 使得学生不再是被动接受知识的听众, 而是变成了主动探索和发现的参与者。他们可以通过自己的操作来验证理论, 提出问题, 寻找答案, 这种学习方式极大地提高了他们的学习动机和参与度。

总之, GeoGebra 的动态特性为介值定理的教学提供了一个直观、互动的平台, 它不仅增加了学习的趣味性, 还加深了学生对数学概念的理解。通过这种教学方法, 学生能够在探索中学习, 在实践中理解, 从而更有效地掌握数学知识, 培养他们的数学思维 and 创新能力。

## 参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学第 8 版 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] 赵越, 杨晓丹, 王琳静, 等. GeoGebra 环境下数形结合思想教学研究 [J]. 高等数学研究, 2023, 26 (04): 24-25+91.
- [3] 杨晓丹, 赵越, 王琳静, 等. 柱壳法求旋转体体积的可视化教学 [J]. 电脑编程技巧与维护, 2023, (09): 156-158. DOI: 10.16184/j.cnki.comprg.2023.09.024.
- [4] 杨晓丹, 赵越, 王琳静, 等. 基于 GeoGebra 软件的螺旋线的可视化教学研究 [J]. 数字化用户, 2023, 29(24): 293-295.
- [5] 马丽霞, 杨晓丹. 基于 GeoGebra 软件的常见的的抽样分布的可视化教学研究 [J]. 大众科学, 2023, (15): 31-33.
- [6] 杨晓丹, 赵越, 王琳静, 周盛华. 基于 GeoGebra 的定积分元素法的教学研究 [J]. 高等数学研究, 2023, 26(4): 21-23.
- [7] 王贵军. GeoGebra 与数学实验 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2017.
- [8] 赵娜. 多媒体环境下定积分元素法的教法初探 [J]. 数学学习与研究, 2017(7).