

从罗尔到拉格朗日：通过旋转的几何之旅探索中值定理

杨晓丹

航天工程大学 基础部, 北京 101416

DOI: 10.61369/SDME.2025270038

摘 要： 本文介绍一种微积分教学方法，引导学生从熟悉的罗尔中值定理出发，借助 GeoGebra 软件的动态图形功能，通过直观的几何操作（如旋转函数图像），自主观察条件变化时结论的演变，从而自然地发现并理解拉格朗日中值定理。该方法强调直观探索与互动，使抽象的定理变得具体，帮助学生主动建构知识。

关 键 词： 微积分；罗尔中值定理；拉格朗日中值定理；GeoGebra 软件

From Rolle to Lagrange: Exploring the Mean Value Theorem through a Geometric Journey of Rotation

Yang Xiaodan

Department of Basic Sciences, Aerospace Engineering University, Beijing 101416

Abstract： This paper introduces a calculus teaching method that guides students to start from the familiar Rolle's Mean Value Theorem, utilizing the dynamic graphical capabilities of GeoGebra software. Through intuitive geometric operations (such as rotating function graphs), students independently observe the evolution of conclusions as conditions change, thereby naturally discovering and understanding Lagrange's Mean Value Theorem. This approach emphasizes intuitive exploration and interaction, making abstract theorems concrete and helping students actively construct knowledge.

Keywords： calculus; Rolle's Mean Value Theorem; Lagrange's Mean Value Theorem; GeoGebra software

引言

微分中值定理，作为高等数学中的核心内容之一，占据着举足轻重的地位。它不仅是连接导数与函数值之间关系的桥梁，更是研究函数性质、证明不等式及求解实际问题的重要工具，具有广泛而深远的影响。作为微积分学的重要理论基础，微分中值定理主要包括罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理，它们共同揭示了函数在某区间内的平均变化率与某点处瞬时变化率（即导数）之间的关系^[1,2]。在理论上，微分中值定理为函数的局部性质与整体性质之间建立了深刻的联系，使得通过导数来研究函数的单调性、凹凸性、极值及最值成为可能。它不仅为理解更复杂的中值定理，如泰勒公式和洛必达法则等提供了理论基础，而且对于深入理解高等数学体系具有重要意义。此外，它在实变函数、微分方程等领域中也发挥着关键作用。在实际应用中，它广泛应用于物理、工程、经济学等多个领域，帮助科学家们通过局部测量来推断全局特性，解决实际问题中的优化与控制问题。总之，微分中值定理在高等数学中的地位和作用不可低估。它既是微积分学的重要理论基础，也为其他数学分支提供了有力工具。在培养数学思维、提高分析和解决问题的能力等方面，微分中值定理发挥着至关重要的作用^[3]。

一、拉格朗日中值定理及几何意义

在同济第八版的高等数学教材中，学生学习的第一个中值定理即罗尔中值定理，定理要求函数 $y=f(x)$ 满足三个条件，分别是 [4]：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$ ，满足条件既有结论：在 (a,b) 内至少有一点 ξ ，使得 $f'(\xi)=0$ 。罗尔定理的几何意义是：如果两端点纵坐标相等的连续曲线，除端点外存在不与 x 轴垂直的切线，那么该曲线至少存在一个最高点或最低点，使该点处的切线平行于 x 轴（图1）。

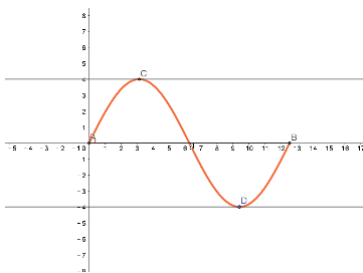


图1 罗尔中值定理几何意义

在罗尔定理的基础上,放宽条件就得到拉格朗日中值定理,即如果函数 $y=f(x)$ 满足:(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续;(2)在开区间 (a,b) 内可导;那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ ($a<\xi<b$),使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立.将结论 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 改写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$,可以发现 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 为弦 AB 的斜率,而 $f'(\xi)$ 为曲线在点 C 处的切线的斜率.因此拉格朗日中值定理的几何意义是:如果连续曲线 $y=f(x)$ 的弧 AB 除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线,那么这弧上至少存在一点 C ,使曲线在 C 点处的切线平行于弦 AB (图2)。

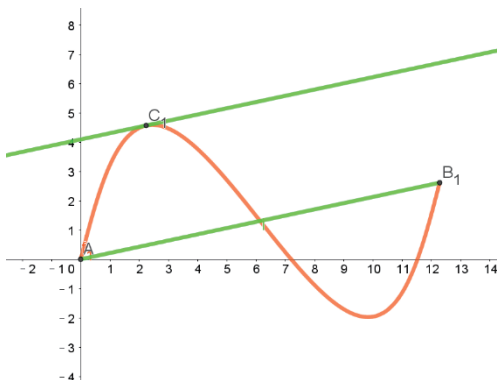


图2 拉格朗日中值定理的几何意义

从图1可以看出,在罗尔定理中,由于 $f(a)=f(b)$,弦 AB 是平行于 x 轴的,因此点 C 处的切线实际上也平行于弦 AB 。由此可见,罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例,而拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广,为此教学过程中,可以利用罗尔中值定理引导学生得到拉格朗日中值定理的条件及结论^[6]。

二、拉格朗日中值定理的探究式教学与 GeoGebra 软件结合的策略

探究式教学是一种以学生为中心的教学模式,它侧重于通过引导学生主动探索、发现问题、分析问题并解决问题的过程来学习和掌握知识。这种教学模式的目标是培养学生的自主学习能力、批判性思维 and 创新能力,让学生在解决实际问题的过程中深化对知识的理解和应用。在拉格朗日中值定理的探究式教学设计中,我们可以从罗尔中值定理出发,设计一系列引导性问题^[6,7]。罗尔中值定理中的“函数在区间两端取值相等”的条件非常特殊,这限制了罗尔定理的应用范围。因此,我们可以引导学生探

究,如果放宽罗尔定理的条件,去掉这一限制,而保留函数在闭区间上连续、在开区间上可导的条件,会发生什么变化?在这个新的情况下,我们还能否找到一个特定的点,使得该点的导数具有某种特殊性质?通过这些问题,激发学生的好奇心和探究欲。最后,引导学生使用 GeoGebra 软件,选择一个满足罗尔条件的函数,并尝试通过旋转图形来“创造”新的条件与结论。学生可以直观地观察到满足罗尔中值定理条件的函数在给定的区间上进行旋转,从而使端点函数值不等时,连接函数曲线端点 AB 的弦与 C 点切线的关系。这样的互动体验能够增强学生的直观理解,帮助他们更深刻地领悟拉格朗日中值定理的几何意义。其中使用 GeoGebra 的动态图形演示功能的设计步骤如下^[8]:

步骤1:定义一个满足罗尔中值定理的条件的函数,例如,定义一个在 $[0,4\pi]$ 上函数 $f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$,显然满足罗尔中值定理的条件。

步骤2:绘制曲线上某点 C 的切线,这个切线的斜率为0,即 $f'(\xi)=0$ 。

步骤3:创建滑动条 α ,控制曲线 $f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ 旋转角度。

步骤4:曲线 $f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ 绕其中一个端点 $(0, f(0))$ 逆时针旋转 α 度使曲线端点处函数值不再相等,为展现曲线上某点的切线与连接曲线端点的弦的平行关系,需要计算曲线上 C 点坐标 (x, y) 逆时针旋转 α 度后对应的 C_1 坐标为 (x_1, y_1) ,为此可设曲线上点坐标 (x, y) 对应向量为 $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,与 x 轴的夹角为 θ , $|\overrightarrow{OP}|=r$,将向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 逆时针旋转 α 度,得到向量 $\overrightarrow{OP_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$,如图3。

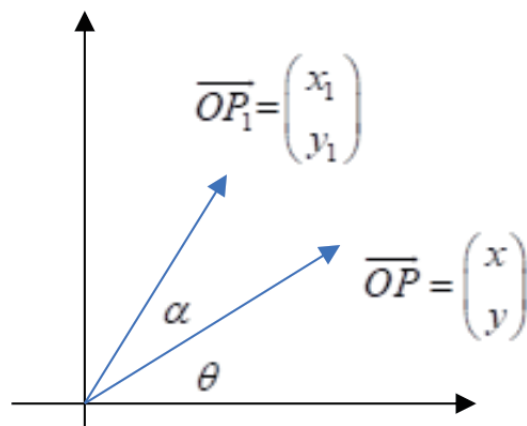


图3 旋转变换

$$\begin{aligned} \text{此时 } \begin{cases} x_1 = r \cos(\theta + \alpha) \\ y_1 = r \sin(\theta + \alpha) \end{cases}, \\ \text{即 } \begin{cases} x_1 = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = \cos \alpha x - \sin \alpha y \\ y_1 = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = \sin \alpha x + \cos \alpha y \end{cases} \\ \text{于是 } \begin{cases} x_1 = \cos \alpha x - \sin \alpha y, \\ y_1 = \sin \alpha x + \cos \alpha y. \end{cases} \end{aligned}$$

步骤5: 绘制过点 C_1 的切线和旋转后连接曲线端点的弦

步骤6: 动态演示。当滑动条的值改变时, 通过旋转操作, 引导学生基于观察与讨论, 直观感受从罗尔到拉格朗日的过渡, 探索拉格朗日中值定理的形成过程。

通过这场从罗尔到拉格朗日的几何旋转之旅, 我们不仅让学生们亲身体验了数学定理的发现过程, 还激发了他们对微积分世界的浓厚兴趣与探索欲。GeoGebra 的动态展示更是为这一过程增添了无限的乐趣与可能, 让数学学习变得更加生动、直观。

三、用 GeoGebra 动态展示详细制作过程

1) 启动 GeoGebra 软件, 分别打开绘图区、代数区。

2) 英文状态下, 在指令栏中输入: $f(x) = \text{如果}(0 \leq x \leq 4\pi, 4\sin(x/2))$

说明: 绘制一个在 $[0, 4\pi]$ 满足罗尔中值定理的条件的函数 $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ 。

3) 英文状态下, 在指令栏中输入: $A=(0, f(0))$

说明: 绘制曲线上左端点 A。

4) 英文状态下, 在指令栏中输入: $B=(4\pi, f(4\pi))$

说明: 绘制曲线上左端点 B。

5) 英文状态下, 在指令栏中输入: $C=(\pi, f(\pi))$

说明: 绘制曲线点 C。

6) 英文状态下, 在指令栏中输入: $D=(3\pi, f(3\pi))$

说明: 绘制曲线点 D。

7) 点击工具栏上的垂线按钮 , 下拉选择切线按钮 (图4), 然后在绘图区中分别单击曲线上点 C 及曲线、D 和曲线, 绘制过 C、D 的切线。(图5)。

说明: 绘制罗尔中值定理的几何图形。



图4 切线工具

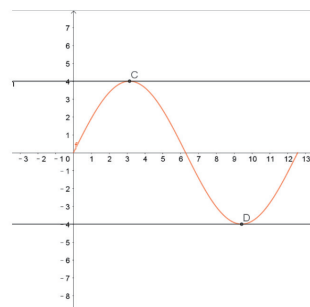


图5 罗尔中值定理的几何意义

8) 点击工具栏上的 , 在绘图区建立滑动条 α , 在出现的滑动条属性框中 (图6) 修改属性。说明: 用于控制旋转角度, 这里根据需要设置角度最大值为 20 度。



图6 旋转角度滑动条的属性

9) 点击工具栏上的轴对称按钮 , 下拉选择旋转按钮 (图7), 然后在绘图区中分别单击曲线和旋转中心 A, 并输入旋转角度 α 。

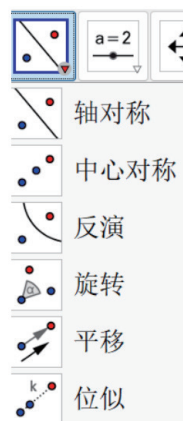


图7 旋转工具

说明: 使曲线绕左端点 A 旋转

10) 英文状态下, 在指令栏中输入: $C_1=(\pi \cos(\alpha) - 4\sin(\alpha), \pi \sin(\alpha) + 4\cos(\alpha))$

说明: 绘制曲线上点 C 旋转角度 α 后的对应点 C_1 。

11) 英文状态下, 在指令栏中输入: $D_1=(3\pi \cos(\alpha) + 4\sin(\alpha), 3\pi \sin(\alpha) - 4\cos(\alpha))$

说明: 绘制曲线上点 D 旋转角度 α 后的对应点 D_1 。

12) 英文状态下, 在指令栏中输入: $B_1=(4\pi \cos(\alpha) - 4\sin(\alpha), \pi \sin(\alpha) + 4\cos(\alpha))$

说明: 绘制曲线上点 B 旋转角度 α 后的对应点 B_1 。

13) 英文状态下, 在指令栏中输入: 线段 (A, B_1)

说明：绘制旋转后连接曲线上两个端点 A 和 B_1 的线段。

14) 英文状态下，在指令栏中输入：线段 (A, B_1)

说明：绘制旋转后连接曲线上两个端点 A 和 B_1 的线段。

15) 点击工具栏上的垂线按钮，下拉选择平行线按钮，然后在绘图区中分别单击曲线上点 C_1 及线段 $A B_1$ 、 D_1 和线段 $A B_1$ ，绘制过 C_1 、 D_1 与线段 $A B_1$ 平行的直线（图8）。

说明：绘制旋转后的切线。

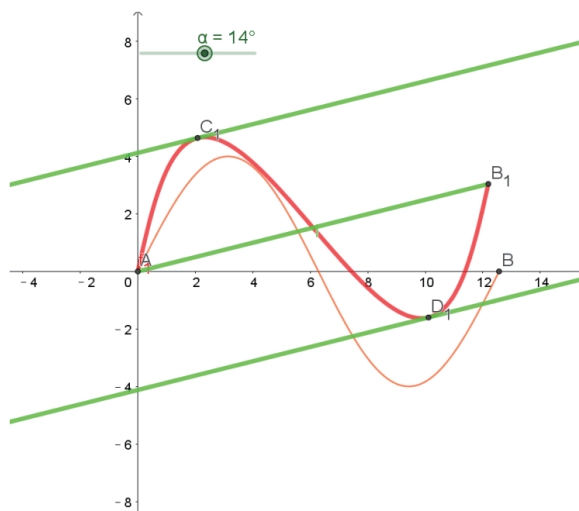


图8 拉格朗日中值定理的几何意义

完成以上设置，通过使用滑动条来动态调整旋转角度，我们可以观察到随着 α 的变化，图形的旋转以及曲线上过点 C_1 、 D_1 的

切线与线段 $A B_1$ 平行的关系，从而加深对拉格朗日中值定理的理解。

四、总结

高等数学因其高度的抽象性和复杂性，常常成为学生面前的一道难关，挑战着他们的学习毅力。为此，引入探究式教学模式成为了一剂良药，它鼓励学生主动质疑、自主探索，这一转变极大地激发了学生们的好奇心与求知的渴望，有效提升了他们的学习动力。特别地，当探究式教学与 GeoGebra 软件相结合，应用于拉格朗日中值定理的教学中时，其效果尤为显著。该模式旨在通过增强学生的互动性和实践操作，引导他们深入探索定理的精髓与外延。GeoGebra 的直观图形演示与动态模拟功能，为学生们呈现了一个生动形象的数学世界，使他们能够在观察与操作中亲身体验定理的奥秘，从而更加深刻地理解其内涵，并在此过程中激发浓厚的学习兴趣和不懈的探究精神。通过这种新颖的教学模式，学生们不仅能够熟练掌握拉格朗日中值定理，并灵活运用其解决实际问题，更重要的是，他们的数学思维能力、问题解决策略以及自主学习能力均得到了显著提升。这些宝贵的素养不仅为他们后续深入学习数学专业知识提供了坚实支撑，也为他们在其他学科及未来职业生涯中的成长与发展奠定了坚实的基础。

综上所述，GeoGebra 在高等数学教学中的创新应用，不仅是对传统教学模式的有效补充与拓展，更是推动数学教育向更加直观、高效、互动方向迈进的强大动力。它极大地促进了学生数学思维的深度发展，激发了他们的探索精神与创新潜能，为学生的全面发展与未来成功铺设了宽广的道路。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学 [M]. 第 8 版, 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] 赵越, 杨晓丹, 王琳静, 等. GeoGebra 环境下数形结合思想教学研究 [J]. 高等数学研究, 2023, 26(4): 24–25, 91. DOI: 10.3969/j.issn.1008-1399.2023.04.007.
- [3] 杨晓丹, 赵越, 王琳静, 等. 柱壳法求旋转体体积的可视化教学 [J]. 电脑编程技巧与维护, 2023(9): 156–158. DOI: 10.3969/j.issn.1006-4052.2023.09.049.
- [4] 杨晓丹, 赵越, 王琳静, 等. 基于 GeoGebra 软件的螺旋线的可视化教学研究 [J]. 数字化用户, 2023, 29(24): 293–295.
- [5] 马丽霞, 杨晓丹. 基于 GeoGebra 软件的常见的的抽样分布的可视化教学研究 [J]. 大众科学, 2023, (15): 31–33.
- [6] 杨晓丹, 赵越, 王琳静, 等. 基于 GeoGebra 的定积分元素法的教学研究 [J]. 高等数学研究, 2023, 26(4): 21–23. DOI: 10.3969/j.issn.1008-1399.2023.04.006.
- [7] 王贵军, GeoGebra 与数学实验 [M], 北京: 清华大学出版社, 2017.
- [8] 赵娜. 多媒体环境下定积分元素法的教法初探 [J]. 数学学习与研究, 2017(7).