信息技术新视角：利用 GeoGebra 深化理解自变量趋于无穷大时函数极限的教学应用

杨晓丹

航天工程大学 基础部，北京 101416

DOI: 10.61369/ETR.2025500036

摘 要： 针对高等数学中自变量趋于无穷大时函数极限的抽象性和理解难度，本研究创新性地将 GeoGebra 动态数学软件引入教学领域，构建了一套互动式可视化教学策略。GeoGebra 以其强大的动态绘图能力，直观展示了自变量无限增大过程中函数值如何趋近于极限值的动态变化，特别是通过动态模拟揭示了极限概念的几何意义。实践表明，该方法有效加深了学生对函数极限定义的理解，增强了其空间想象能力和逻辑推理能力，同时激发了学生的学习兴趣和探索欲，推动了学生从被动接受到主动探索的转变，为高等数学特别是极限概念的教学提供了新的视角和方法。

关 键 词： GeoGebra 可视化教学；自变量无穷大时函数极限；动态模拟；几何意义；教学创新

New Perspective of Information Technology: Using GeoGebra to Deepen Understanding of the Teaching Application of Function Limits when Independent Variables Tend towards Infinity

Yang Xiaodan

Department of Basic Sciences, Aerospace Engineering University, Beijing 101416

Abstract: In response to the abstraction and difficulty in understanding the limits of functions when independent variables tend to infinity in higher mathematics, this study innovatively introduces GeoGebra dynamic mathematics software into the teaching field and constructs an interactive visual teaching strategy. GeoGebra, with its powerful dynamic drawing ability, intuitively demonstrates how the function value approaches the limit value during the infinite increase of the independent variable, especially revealing the geometric significance of the limit concept through dynamic simulation. Practice has shown that this method effectively deepens students' understanding of the definition of function limits, enhances their spatial imagination and logical reasoning abilities, while stimulating their learning interest and exploration desire, promoting their transition from passive acceptance to active exploration, and providing new perspectives and methods for teaching higher mathematics, especially the concept of limits.

Keywords: **GeoGebra visualization teaching; infinite independent variable function limit; dynamic simulation; geometric meaning; teaching innovation**

引言

在高等数学的学习旅程中，自变量趋于无穷大时函数的极限是一个核心概念，它不仅是后续微积分学的基础，也是培养学生逻辑思维和科学素养的关键环节 [1]。然而，这一概念的抽象性和其背后的 $\varepsilon - M$ 定义的复杂性，常让学生感到困惑和难以掌握。特别是如何直观理解随着自变量的无限增大，函数值如何稳定地趋近于某一固定值，成为教学中的一大挑战 [2,3]。传统的教学方法往往侧重于理论讲授，难以直观地展现这一动态变化过程，限制了学生对极限概念的深入理解和灵活运用。随着信息技术的进步，GeoGebra 等动态数学软件的出现，为解决这一难题提供了强有力的工具。GeoGebra 能够通过其动态的图形展示和交互式操作，让学生亲手“触碰”数学，直观地看到自变量无限增大时函数值的变化趋势，从而深刻理解极限的几何意义和动态特征。基于此，本研究旨在探索 GeoGebra 在自变量趋于无穷大时函数极限可视化教学中的应用。通过 GeoGebra 的动态模拟功能，学生可以动态调整 ε 的值，观察 M 的变化，深化对极限概念的理解。这种互动式、可视化的教学模式，不仅有助于提升学生的数学素养，还能激发其学习兴趣和探索精神，为高等数学教育的创新提供新的思路和实践 [4]。

作者简介：杨晓丹，女，教授，主要从事大学数学课程教学研究。

一、自变量趋于无穷大时函数极限的定义及几何意义

在高等数学的体系中，极限理论是微积分学的基础。我们首次接触的极限概念通常是数列极限，可以视为自变量仅取自然数时的特殊函数极限。具体来说，若把数列 $\{a_n\}$ 理解为自变量仅取自然数 n 的函数，即 $a_n = f(n)$，那么数列的极限就可以被看作是这种特殊函数在自变量趋向于无穷大时的极限。当我们把自变量的范围从自然数推广到实数，并考虑自变量趋向于无穷大的情形，就得到了函数极限的一般定义即 [5]：设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义 . 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 M，使得当 x 满足不等式 $|x|>M$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，或者说，函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当$x\to\infty$时），简单表述为：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,\text{当}|x|>M\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon。$$

从几何上来说，在直角坐标系中，函数 $f(x)$ 当 x 趋向于无穷大时的极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的意义是：作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，则总有一个正数 M 存在，使得当 $x<-M$ 或 $x>M$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间。

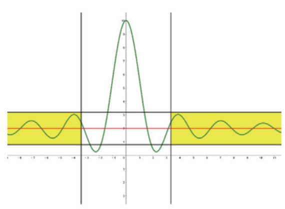


图1

这时，直线 $y=A$ 是函数 $f(x)$ 的图形的水平渐近线 . 也就是说，随着 x 的值不断增大，函数 $f(x)$ 的图像会越来越接近水平线 $y=A$。在 x 趋向于无穷的过程中，函数值 $f(x)$ 将无限接近于 A。通过这样的定义和几何解释，我们不仅能够理解函数在自变量趋于无穷大时的行为，还能够直观地把握函数的长期趋势和稳定状态，这对于分析和解决实际问题具有重要的意义。

二、重塑极限概念教学的关键点与 GeoGebra 的融合策略

对于自变量趋于无穷大时函数的极限的定义，我们必须精准把握以下三个核心方面，一是 ε 与 M 的关系，学生常常难以把握不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 中 ε 的任意性与 M 的存在性之间的联系。ε 代表了我们对于函数值接近极限值的精度要求，而 M 则是根据这个精度要求找到的一个阈值，使得所有大于 M 的 |x| 值都能满足这个精度要求。学生需要理解的是，对于任意小的 ε，我们总能找到一个足够大的 M，使得当 x 超过 M 时，$f(x)$ 与 A 的距离小于 ε。二是自变量趋向无穷大的过程，学生往往难以形成直观的认识。在日常生活中，我们很少有直接与无穷大打交道的经验，因此，理解自变量无限增大的概念需要一定的抽象思维能力。[6] 教师可以通过动画或者实际例子来帮助学生构建这一概念。三是极限的收敛性，即函数值如何随着自变量的增大而稳定下来并趋向于一个固定的常数 A。学生可能会对函数值如何从一个初始值逐渐靠近 A 的过程感到困惑，特别是在函数图像变化复杂时。

为了帮助学生克服这些理解障碍，可以利用 GeoGebra 等数学软件，通过动态演示 ε 与 M 的关系，让学生看到随着 ε 的减小，M 是如何变化的。这种动态的可视化教学来降低理解难度，帮助学生更好地理解极限的定义。具体实施策略如下：

步骤 1：定义函数。例如，定义一个函数 $f(x)=2+4\dfrac{\sin(2x)}{x}$。

步骤 2：创建滑动条 ε

步骤 3：计算函数 $f(x)=2+4\dfrac{\sin(2x)}{x}$ 的极限得 $A=2$，绘制 $y=2$、$y=2+\varepsilon$、$y=2-\varepsilon$ 图像。

步骤 4：根据 $|f(x)-A|<\varepsilon$，计算出 $M=\dfrac{4}{\varepsilon}$。

步骤 5：绘制 $x=\dfrac{4}{\varepsilon}$，$x=-\dfrac{4}{\varepsilon}$ 的图像。

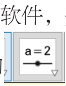
步骤6：填充两个四边形（$y=2+\varepsilon$、$y=2-\varepsilon$、$x=\dfrac{4}{\varepsilon}$，$x=-\dfrac{4}{\varepsilon}$、$x=1000$，$x=-1000$ 所围成的区域）。

步骤 7：动态演示。当滑动条的值改变时，函数值如何接近极限值2以及 $|x|>M$ 的变化和函数 $f(x)$ 位于 $y=2+\varepsilon$、$y=2-\varepsilon$ 这个带形区域内的图像。

通过以上这些步骤得实施，不仅增强了学员对定义的理解，而且直观展示极限过程中的关键要素和动态变化，还能有效促进学生主动探索。这种方法不仅降低了抽象概念的学习门槛，还激发了学生的学习兴趣和积极性，为高等数学教学的创新与发展提供了新的视角和动力 [7,8]。

三、用 GeoGebra 动态展示详细制作过程

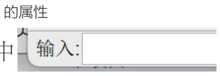
1）启动 GeoGebra 软件，分别打开绘图区、代数区。

2）点击工具栏上的

，在绘图区建立滑动条 ε，在出现的滑动条属性框中（图2）。

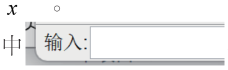
说明：用于控制 $f(x)$ 无限趋近于 A 的变化趋势，以及带形区域的宽度。

图2 滑动条 ε 的属性

3）英文状态下，在指令栏中

输入：y=2+ $4*sin(2*x)/x$。

说明：绘制曲线 $f(x)=2+4\dfrac{\sin(2x)}{x}$。

4）英文状态下，在指令栏中

输入：

y=2+ ε 。

说明：绘制直线 $y=2+\varepsilon$ 。

5）英文状态下，在指令栏中 输入: 输入：=2- ε 。

说明：绘制直线 $y=2-\varepsilon$ ，与上面的直线构成带宽为 2 ε 的带形区域。

6）英文状态下，在指令栏中 输入: 输入：x=4/ ε 。

说明：绘制直线 $x=\frac{4}{\varepsilon}$ 。

7）英文状态下，在指令栏中 输入: 输入：x=-4/ ε 。

说明：绘制直线 $x=-\frac{4}{\varepsilon}$ 。

8）点击工具栏上描点按钮，下拉选择交点按钮（图3），然后单击四条直线 $y=2+\varepsilon$ 和 $x=\frac{4}{\varepsilon}$ 、 $y=2-\varepsilon$ 和 $x=\frac{4}{\varepsilon}$ 、 $y=2+\varepsilon$ 和 $x=1000$ 、 $y=2-\varepsilon$ 和 $x=1000$ $y=2+\varepsilon$ 和 $x=-\frac{4}{\varepsilon}$ 、 $y=2-\varepsilon$ 和 $x=-\frac{4}{\varepsilon}$ 、 $y=2+\varepsilon$ 和 $x=-1000$ 、 $y=2-\varepsilon$ 和 $x=-1000$ ，绘制两条直线的交点。

图3 描点按钮

说明：绘制交点，不妨记为A、B、A’、B’ 和C、D、C’、D’。

9）英文状态下，在指令栏中 输入: 输入：多边形 (A, B, B', A')。

说明：绘制多边形，并调整属性设置多边形的填充颜色，便于观察对于不同的 ε ，有不同的的 M 与之对应，并且 $x>M$ 这个领域中点对应的函数图像在多边形中。

10）英文状态下，在指令栏中 输入: 输入：多边形 (C, D, D', C')。

说明：绘制多边形，并调整属性设置多边形的填充颜色，便于观察对于不同的 ε ，有不同的的 M 与之对应，并且 $x<-M$ 这个领域中点对应的函数图像在多边形中。

完成以上设置，通过使用滑动条来动态调整参数 ε ，我们可以观察到随着 ε 的变化，以极限点2为中心的带宽为 2ε 的带形区域如何相应地伸缩（如图4所示），以及区间 $|x|>M$ 如何随之变化，以及对应的函数图像是否落在以2为中心的带宽为 2ε 的带形区域中。这种互动式的可视化方法不仅增强了学生对 $\varepsilon-M$ 定义的几何直观理解，而且有助于他们更深刻地把握函数极限的实质，即无论 ε 如何变化，总存在一个 M 使得函数值落在对应的带形区域内，从而在几何层面上揭示了极限的内涵 [9]。

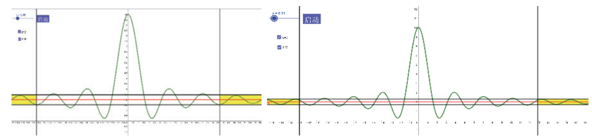


图4 ε -M 的关系

上面的设置完成了演示的基本设置，但演示缺乏交互性，需要点击左侧的代数区相应的命令来决定显示的图像，这时需要演示者清楚每条命令的作用，以及哪些指令同时出现会显示什么效果等，如果对 Geogebra 不清楚的老师无法上手演示，所以要达到更好的演示效果还需要进一步的进行交互命令的设计 [10]。

四、总结

高等数学的学习因其高度抽象和复杂，往往让学生感到挑战重重。为了有效应对这一难题，将 GeoGebra 这一动态几何与代数软件引入高等数学教学，已成为一种创新而有效的教学手段。GeoGebra 能够将函数极限的几何意义直观展现，将抽象的数学概念具体化，极大地加深了学生对函数极限定义的理解。这不仅能帮助教师突破教学难点，还能以更生动、互动的方式呈现数学原理，提升教学质量和学习效果。这种教学模式的变革，不仅促进了学生数学素养和综合能力的提升，也为数学教育的创新与发展注入了新的动力。综上所述，GeoGebra 在高等数学教学中的应用，不仅丰富了传统教学模式，更是推动数学教育向直观、高效、互动方向发展的关键力量，有助于培养学生的数学思维、探索精神和创新能力，为他们未来的成长打下坚实基础。

参考文献

[1] 同济大学数学系，高等数学 [M]，第 8 版，北京：高等教育出版社，2023.

[2] 赵越，杨晓丹，王琳静，等 . GeoGebra 环境下数形结合思想教学研究 [J]. 高等数学研究 ,2023,26(4):24-25,91. DOI:10.3969/j.issn.1008-1399.2023.04.007.

[3] 杨晓丹，赵越，王琳静，等 . 柱壳法求旋转体体积的可视化教学 [J]. 电脑编程技巧与维护 ,2023(9):156-158. DOI:10.3969/j.issn.1006-4052.2023.09.049.

[4] 杨晓丹，赵越，王琳静，等 . 基于 GeoGebra 软件的螺旋线的可视化教学研究 [J]. 数字化用户 ,2023,29(24):293-295.

[5] 马丽霞，杨晓丹 . 基于 GeoGebra 软件的常见的的抽样分布的可视化教学研究 .《大众科学》. 2023 年，15：31-33 页 .

[6] 杨晓丹，赵越，王琳静，等 . 基于 GeoGebra 的定积分元素法的教学研究 [J]. 高等数学研究 ,2023,26(4):21-23. DOI:10.3969/j.issn.1008-1399.2023.04.006.

[7] 王贵军 .GeoGebra 与数学实验 [M]. 北京：清华大学出版社，2017.

[8] 赵娜 . 多媒体环境下定积分元素法的教法初探 [J]. 数学学习与研究 ,2017(7).

[9] 冯俊飞 . 基于 GeoGebra 软件辅助中职数学教学的实践研究 [D]. 浙江：浙江师范大学 ,2019.

[10] 李云晶 . 基于 Geo Gebra 的初中函数教学实践探究 [D]. 上海师范大学 ,2018.

