信息技术赋能下的函数极限存在性的几何阐释创新教学

杨晓丹

航天工程大学 基础部，北京 101416

DOI: 10.61369/VDE.2025230034

摘　　要： 高等数学，作为高等教育体系中的基石课程，不仅深刻体现了数学学科的丰富性与深度，更是锻造学生逻辑思维与抽象认知能力的熔炉。其中，函数极限作为微积分学的理论基石，其重要性贯穿整个学习脉络，不容忽视。然而，极限概念的抽象性和理论深度常成为学生理解道路上的绊脚石，影响学习成效。为破解此教学难题，本文引入了一种融合信息技术的新型教学策略——运用 GeoGebra 动态数学软件实现函数极限存在的几何解释的可视化教学。GeoGebra，作为一款集动态演示、计算与探索于一体的数学软件，其强大功能能够将晦涩难懂的数学原理转化为直观可视的图形与动画，为学生构建了一个直观感知与抽象思维相融合的学习环境。本文聚焦于函数极限的定义及其几何本质的直观展示，精心设计了基于 GeoGebra 的数学实验。在实验过程中，我们利用 GeoGebra 动态模拟函数值随自变量变化的趋势，直观呈现极限点被逐步逼近的动态过程，并同步展示这一过程中几何图像所反映的极限行为。这种直观展示方式不仅极大地激发了学生的学习兴趣，还有效提升了他们的空间想象与逻辑推理能力。学生们能够亲眼目睹并感受极限概念的动态生成过程，从而深刻理解其本质属性。

关 键 词： Geogebra 动态教学软件；函数极限；几何意义；可视化教学设计

Geometric Interpretation of the Existence of Function Limits Empowered by Information Technology and Innovative Teaching

Yang Xiaodan

Department of Basic Sciences, Aerospace Engineering University, Beijing 101416

Abstract : Advanced mathematics, as a cornerstone course in the higher education system, not only deeply reflects the richness and depth of mathematics, but also serves as a melting pot for forging students' logical thinking and abstract cognitive abilities. Among them, the importance of function limits as the theoretical cornerstone of calculus runs through the entire learning process and cannot be ignored. However, the abstraction and theoretical depth of the concept of limits often become stumbling blocks for students on the road to understanding, affecting their learning effectiveness. To solve this teaching problem, this article introduces a new teaching strategy that integrates information technology – using GeoGebra dynamic mathematics software to achieve visual teaching of geometric interpretation of the existence of function limits. GeoGebra， As a mathematical software that integrates dynamic demonstration, calculation, and exploration, its powerful functions can transform obscure and difficult to understand mathematical principles into intuitive and visual graphics and animations, creating a learning environment that combines intuitive perception and abstract thinking for students. This article focuses on the definition of function limits and their geometric essence, and carefully designs a series of mathematical experiments based on GeoGebra. During the experiment, we used GeoGebra to dynamically simulate the trend of function values changing with independent variables, visually presenting the dynamic process of gradually approaching the limit point, and synchronously displaying the limit behavior reflected by the geometric image during this process. This intuitive display not only greatly stimulates students' interest in learning, but also effectively enhances their spatial imagination and logical reasoning abilities. Students can witness and experience the dynamic generation process of the concept of limits with their own eyes, thus gaining a profound understanding of its essential attributes.

Keywords : **Geogebra dynamic teaching software; function limits; geometric meanings; visual teaching design**

作者简介：杨晓丹，女，副教授，主要从事大学数学课程教学研究。

引言

在高等教育的广阔天地里，高等数学不仅是理工科学生的必修基石，更是培养学生逻辑思维、抽象思维以及问题解决能力的关键阵地。其中，函数极限作为微积分学的核心概念，犹如一座桥梁，连接着初等数学与高等数学的深邃世界，对于学生深入理解微积分精髓、掌握数学分析方法具有不可替代的作用 [1]。然而，极限概念的抽象性如同一道高墙，常常让学生望而却步，影响其对整体知识体系的掌握。传统的极限教学方法偏重于理论讲授与公式推导，往往忽略了学生直观感知与实践操作的重要性，这在一定程度上抑制了学生的学习兴趣，增加了学习难度 [2-4]。因此，探索一种能够直观展示极限过程、降低理解门槛的教学新路径，成为了当前高等数学教育改革的重要议题。随着信息技术的迅猛发展，可视化教学工具在数学教育领域的应用迎来了春天。GeoGebra，作为这一领域的佼佼者，凭借其卓越的动态演示能力和丰富的数学资源，为数学教学开辟了新天地。它能够将复杂抽象的数学概念转化为生动直观的图形、动画，让学生在视觉与触觉的双重刺激下，深化对知识的理解与掌握。基于此，本文聚焦于 GeoGebra 在极限概念可视化教学中的应用，通过设计并实施一基于 GeoGebra 的数学实验，旨在为学生提供一种全新的学习体验，帮助他们跨越极限学习的障碍，提升学习效率。同时，本文也期望通过这一实践，为高等数学教学的创新与发展注入新的活力，推动信息技术与数学教育的深度融合 [5]。

一、函数极限的定义及几何意义

在同济大学第八版高等数学教材中，函数在自变量趋于有限值时的极限定义简单表述为：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内是有定义，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ 当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时，}$$

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

由定义中的不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 得 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，故而函数在自变量趋于有限值时的极限存在的几何解释为：对任意 $\varepsilon>0$，作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 为边界的带形区域，总存在 $\delta>0$，当自变量 x 在点 x_0 的去心 δ 邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，相应的函数 $f(x)$ 的图象位于这个带形区域之内（如图1）

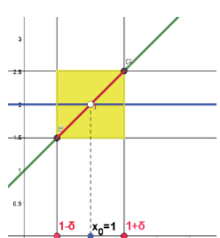


图 1 函数极限存在的几何解释

在高等数学的教学过程中，学员们普遍会在难以理解 ε 与 δ 的关系。尤其是难以把握 ε 与 δ 之间的相互关系。首先我们需要让学员认识到任意正数 ε 所具有的双重性质：固定性和任意性。ε 的固定性体现在，一旦我们选定了一个具体的 ε 值，可通过 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 求出相应的时刻 δ，再由 $0<|x-x_0|<\delta$ 刻画自变量 x 与常数 x_0 的接近程度．又因 ε 可以任意小，所以才能由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 刻画 $f(x)$ 无限趋近于 A 的变化趋势．其次 ε 是预先给定的，δ 是由 ε 确定的，有时记作 $\delta=\delta(\varepsilon)$．一般说来，$\varepsilon$ 越小 δ 也就越小．δ 不是唯一的，关键在于确保存在这样一个 δ，使得条件得以满足，而并非 δ 的具体值。[6]

二、重塑极限概念教学的关键点与 GeoGebra 的融合策略

为了帮助学生克服理解 ε 与 δ 关系的障碍，我们可以借助 GeoGebra 这一动态几何画板软件。通过精心设计的指令和动画，直观地展示 ε 与 δ 之间的关系，从而帮助学员们跨越认知上的障碍 [7]。在 GeoGebra 中，我们可以动态调整 ε 的大小，并实时观察对应的 δ 如何变化，以及它们如何共同作用于函数图像，使得学员能够直观地看到当 x 趋近于 x_0 时，f(x) 是如何趋近于极限值 A 的。具体实施策略如下：

步骤 1：定义函数。例如，定义一个函数 $f(x)=x+1$。

步骤 2：确定极限点。确定你要计算极限的点，例如 x = 1。

步骤 3：创建滑动条 ε。

步骤 4：绘制函数 $f(x)=x+1$、$y=2$、$y=2+\varepsilon$、$y=2-\varepsilon$ 图像。

步骤 5：计算 δ，绘制 $x=1+\delta$、$x=1-\delta$ 的图像。

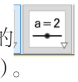
步骤 6：填充四边形（$y=2+\varepsilon$、$y=2-\varepsilon$、$x=1+\delta$、$x=1-\delta$ 所围成的区域）。

步骤 7：动态演示。当滑动条的值改变时，函数值如何接近极限值以及 δ 的变化和函数 $f(x)$ 位于 $y=2+\varepsilon$、$y=2-\varepsilon$ 这个带形区域内的图像。

通过这些步骤，不仅增强了学员对 ε－δ 定义的理解，也提高了他们的空间想象能力和逻辑思维能力，为深入学习微积分打下了坚实的基础。

三、用 GeoGebra 动态展示详细制作过程

1）启动 GeoGebra 软件，分别打开绘图区、代数区。

2）点击工具栏上的 

，在绘图区建立滑动条 ，在出现的滑动条属性框中（图2）。

说明：用于控制 $f(x)$ 无限趋近于 A 的变化趋势，以及带形区域的宽度。

图2 滑动条的属性

3）英文状态下，在指令栏中

输入：y=x+1

说明：绘制直线 y=x+1。

4）英文状态下，在指令栏中

输入：y=2+ ε

说明：绘制直线 $y=2+\varepsilon$ 。

5）英文状态下，在指令栏中

输入：y=2− ε

说明：绘制直线 $y=2-\varepsilon$ ，与上面的直线构成带宽为2 ε 的带形区域。

6）英文状态下，在指令栏中

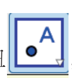
输入：x=1+ δ

说明：绘制直线 $x=1+\delta$

7）英文状态下，在指令栏中

输入：x=1− δ

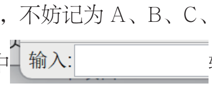
说明：绘制直线 $x=1+\delta$ ，与上面直线 $x=1+\delta$ 形成一个带形区域，用来展现邻域 $0<|x-x_0|<\delta$ 这个领域中点对应的函数图像。

8）点击工具栏上描点按钮

，下拉选择交点按钮（图3），然后单击四条直线 $y=2+\varepsilon$ 、 $y=2-\varepsilon$ 、 $x=1+\delta$ 、 $x=1-\delta$ 中任意两条，绘制两条直线的交点。

图3 描点按钮

说明：绘制四条直线的交点，不妨记为 A、B、C、D。

9）英文状态下，在指令栏中

输入：多边形(A,B,C,D)

完成以上设置，通过使用滑动条来动态调整参数 ε ，我们可以观察到随着 ε 的变化，以极限点2为中心的带宽为2 ε 的带形区域如何相应地伸缩（如图4所示），以及区间 $0<|x-x_0|<\delta$ 如何随之变化，以及对应的函数图像是否落在以2为中心的带宽为2 ε 的带形区域中。这种互动式的可视化方法不仅增强了学生对 ε − δ 定义的几何直观理解，而且有助于他们更深刻地把握函数极限的实质，即无论 ε 如何变化，总存在一个 δ 使得函数值落在对应的带形区域内，从而在几何层面上揭示了极限的内涵[8]。

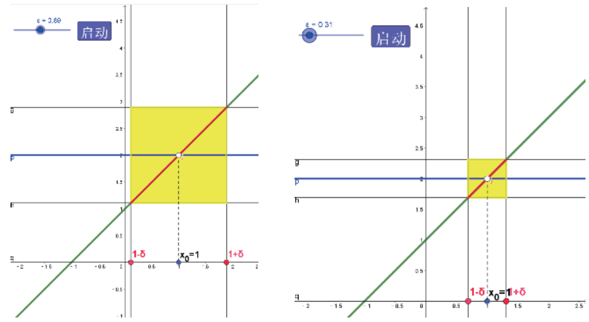


图4 带形区域及函数图像

四、总结

高等数学因其抽象复杂，常使学生面临挑战。传统教学难以展现数学概念动态，限制理解应用。我们利用 GeoGebra 的滑动条和跟踪工具，允许学生动态调整 ε 的值，并实时观察函数图像如何随之变化，从而直观感受极限的“逼近”过程。这种基于动态演示和互动操作的教学模式，不仅极大地丰富了学生的直观感知，还促进了他们对极限概念的深刻理解和灵活应用。更重要的是，这一过程激发了学生的好奇心和探索欲，培养了他们的自主学习和探究创新能力。

参考文献

[1] 同济大学数学系，高等数学 [M]. 第8版，北京：高等教育出版社，2023.

[2] 赵越，杨晓丹，王琳静，等. GeoGebra 环境下数形结合思想教学研究 [J]. 高等数学研究，2023,26(04):24-25+91.

[3] 杨晓丹，赵越，王琳静，等. 柱壳法求旋转体体积的可视化教学 [J]. 电脑编程技巧与维护，2023,(09):156-158.DOI:10.16184/j.cnki.comprg.2023.09.024.

[4] 杨晓丹，赵越，王琳静，等. 基于 GeoGebra 软件的螺旋线的可视化教学研究 [J]. 数字化用户，2023,29(24):293-295.

[5] 马丽霞，杨晓丹. 基于 GeoGebra 软件的常见的的抽样分布的可视化教学研究 [J]. 大众科学，2023,(15):31-33.

[6] 杨晓丹，赵越，王琳静，等. 基于 GeoGebra 的定积分元素法的教学研究 [J]. 高等数学研究，2023,26(04):21-23.

[7] 王贵军 .GeoGebra 与数学实验 [M]. 北京：清华大学出版社，2017.

[8] 赵娜. 多媒体环境下定积分元素法的教法初探 [J]. 数学学习与研究，2017(7).

