物理意义与数学方法在弹性力学教学中的平衡——以平衡微分方程教学为例

王贤情，周泽，李鹏，廖泽，孙长伦
贵州理工学院，贵州 贵阳 550003

DOI: 10.61369/ETR.2025460051

摘　　要： 弹性力学作为工科领域的最重要的专业基础课程之一，在后续专业课程的学习过程起到十分关键的作用。但由于弹性力学理论与原理过于晦涩与抽象，导致学生在学习的过程中缺乏学习积极性。本文以弹性力学中平衡微分方程的教学为例，在数学推导过程中引入应力的物理意义，通过物理意义在理论教学过程中的穿插，使推导过程变得形象生动。该教学方法可应用于高等院校相关专业（如矿业工程、土木工程、机械工程等）的教育教学实践中，并在实践中不断检验、校准。相关的教学经验可为同类型的力学类课程的建设与改革提供借鉴与参考。

关 键 词： 弹性力学；教学方法创新；平衡微分方程；应力下标物理意义

The Balance of Physical Meaning and Mathematical Method in the Teaching of Elastic Mechanics-Taking the Teaching of Equilibrium Differential Equation as an Example

Wang Xianqing， Zhou Ze，Li Peng，Liao Ze，Sun Changlun
Guizhou Institute of Technology, Guiyang, Guizhou 550003

Abstract： As one of the most important professional basic courses in the field of engineering, elastic mechanics plays a key role in the learning process of subsequent professional courses. However, because the theory and principle of elastic mechanics are too obscure and abstract, students lack enthusiasm for learning in the process of learning. Taking the teaching of equilibrium differential equations in elastic mechanics as an example, this paper introduces the physical meaning of stress in the process of mathematical derivation. Through the interpenetration of physical meaning in the process of theoretical teaching, the derivation process becomes vivid. This teaching method can be applied to the education and teaching practice of related majors (such as mining engineering, civil engineering, mechanical engineering, etc.) in colleges and universities, and is constantly tested and calibrated in practice. The relevant teaching experience can provide reference for the construction and reform of the same type of mechanics courses.

Keywords： elastic mechanics; teaching method innovation; equilibrium differential equations; physical meaning of stress subscript

引言

弹性力学作为力学板块重要的组成部分，是矿业、土木、航天、机械等工科学科的专业基础课程[1-3]，熟练掌握并应用弹性力学的基本理论对工科类学生的学习与工作至关重要[4,5]。但传统的弹性力学课本往往偏重数学公式的推导与应用而忽略了物理意义的讲授，且弹性力学理论与原理又相对抽象与晦涩[6-8]。这导致学生在弹性力学课程的学习过程中缺乏兴趣与主动性。

平衡微分方程是研究弹性力学问题的重要基础，在弹性力学教学中占据核心地位。为此，本文以弹性力学中的平衡微分方程讲授为例提出了一种新的教学方式——从力学的物理意义出发，平衡教学过程中的数学技巧与物理内涵，以直角坐标系下平衡微分方程的教学为例，梳理平衡微分方程推导过程中物理内涵，旨在使学生更轻松的理解抽象的方程推导过程。并以贵州理工学院采矿231班和采矿232班为教学对象，验证该方法对学习效率的提升效果。

基金项目： 贵州理工学院教育教学改革项目“智能采矿课程群流体力学立体动态可视化教学案例库创建与实践”（JGYB202405）。
作者简介：王贤情（1992—），男，汉族，湖南邵阳人，博士，讲师。主要从事连续介质力学与充填采矿方面的教学与科研工作。

一、应力下标的物理意义

平衡微分方程在弹性力学的教学中占据了重要的位置[9,10]。在介绍平衡微分方程的过程中，大多数教材都是从剪切应力互等出发，利用切应力 τxy=τyx 这个等量关系，在推导过程中不再区分 τxy 和 τyx。这一数学操作虽然在一定程度上简化了平衡微分方程的推导过程，但淡化了切应力下标所表达的物理意义，使得初学者在接触平衡微分方程的过程中难以把握方程的内在物理逻辑。此外，淡化切应力下标阻碍了学生理解和区分坐标面上的应力，易导致学生混淆不同坐标面上的切应力，不利于课程后续的如极坐标下平衡微分方程的学习。

在弹性力学中，应力的第一个下标表示坐标面法向向量的方向，如在直角坐标系中，第一个下标为 x，则表示应力所在面的法向方向与 x 轴同向[11,12]。应力的第二个下标表示应力的指向，若第二下标为 y，则表示应力的指向方向与 y 轴方向一致。若采用切应力互等定理模糊切应力下标的物理意义，将导致初学者在绘制平面上的应力混淆 x 面上指向 y 方向上的力和 y 面上指向 x 方向上的力。因此在，在讲解平衡微分方程乃至整个弹性力学的教学过程中，明确切应力下标的物理意义是十分有必要的。

在明确应力下标的物理意义后，可采用数学中排列组合的原理对应力的书写过程进行讲授。以三维直角坐标为例，在确定应力的第一个下标，有 x，y 和 z 三个法向量可进行选择，因此应力的第一个下标可分别为 x，y 和 z，分别表示作用在 x，y 和 z 面上的应力。同理，在确定完第一个下标后，应力的第二个下标仍然有 x，y 和 z 三个指向可进行选择，故而应力的第二个下标同样可为 x，y 和 z。即将 x，y 和 z 分别填入两个下标中进行排列组合，具体书写过程如（1）式。

$$\sigma-\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.\rightarrow\sigma-\left|\begin{matrix}x&&x\\y&-&y\\z&&z\end{matrix}\right.\rightarrow\sigma\begin{bmatrix}xx&xy&xz\\yx&yy&yz\\zx&zy&zz\end{bmatrix}\qquad(1)$$

式中：σ－正应力；x，y 和 z 为应力下标。

书写完毕后，可将下标不一致的 σ 改为 τ，τ 为切应力。以 yoz 面上的应力为例，该面的法向量为 x，因此应力的第一个下标为 x。对于第二个下标，可分别填入 x，y 和 z，表明这个面上有三个分别沿着 x，y 和 z 轴方向的应力。下标相同的应力为正应力，下标不相同的力为切应力。

二、直角坐标系下平衡微分方程的推导过程

对于三维直角坐标系下平衡微分方程的推导过程，传统的教材中常采用先绘制正六面体上的应力，再根据对应面上的应力方向建立相应方向的平衡方程。上述推导过程虽然相对直观，但在平面上绘制三维正六面体上的18个应力如图1所示，难免会使得版面略显繁杂，使初学者在推导过程中易遗漏某一平面上的应力。

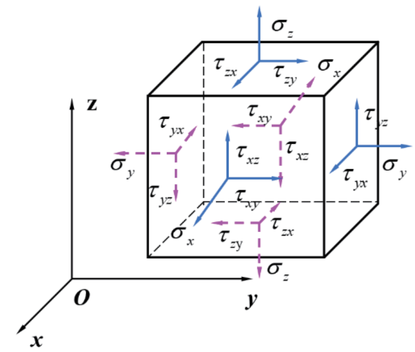

图1 正六面体上的应力

若采用应力的物理意义对平衡微分方程进行推导，则完全可以规避在推导过程中遗漏某一应力的风险。以 x 轴方向上的平衡微分方程推导为例，采用应力的物理意义对方程进行推导，具体过程如下：

1. 确定靠近坐标面 x 轴方向上的应力

利用应力下标的物理意义，指向 x 轴方向的应力第二个下标为 x，因此，只需要确定应力的第一个下标。由于考虑的是三维空间中的受力平衡，因此应力的第一个下标可以为 x，y 和 z。故而靠近坐标面上指向 x 轴方向上的应力为：

$$\sigma_{xx},\tau_{yx},\tau_{zx}$$

2. 确定靠近坐标面 x 轴方向上的力

根据应力第一个下标的物理意义，x 为应力作用面的法向方向，因此该面的面积应为 dydz，同理可获得其他两应力作用面的面积。故而靠近坐标面 x 轴方向上的力为：

$$\sigma_{xx}dydz,\tau_{yx}dxdz,\tau_{zx}dxdy$$

3. 确定远离坐标面 x 轴方向上的应力

以 σxx 为例，利用应力下标第一个下标的物理意义可知，在 σxx 由靠近坐标的面上移至远离坐标的面上时，x 轴的坐标增加了 dx，而 y 和 z 的坐标不变，故而远离坐标面上的正应力为：

$$\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx$$

同理可得远离坐标面 x 轴方向上的另外两个应力为：

$$\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy,\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dy$$

4. 确定远离坐标面 x 轴方向上的力

根据步骤2的分析，同理可得远离坐标面 x 轴方向上的力为：

$$(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx)dydz,(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy)dxdz,(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dy)dxdy$$

为 x 轴方向上的力添上正、负号（指向 x 轴增加的方向为正）并考虑体力可得：

$$(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx)dydz+(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy)dxdz+(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dy)dxdy \\ -\sigma_{xx}dydz-\tau_{yx}dxdz-\tau_{zx}dxdy+f_xdxdydz=0 \qquad(2)$$

式中：fx 为单位质量的体积力。

合并同类项可得：

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+f_x=0 \qquad(3)$$

 |

同理可得到 y 和 z 方向上的平衡微分方程。

三、直角坐标系下平衡微分方程的记忆方法

多数初学者在记忆平衡微分方程的过程中常存在困难，若采用应力的物理意义结合数学中排列组合原理对平衡微分方程进行记忆，那么所有的困难都将迎刃而解。以 x 轴方向的三维直角坐标平衡微分方程为例，可按如下步骤对平衡微分方程进行记忆与书写：

1. 确定应力个数及方向

首先明确研究对象为几维（2维或3维）的平衡微分方程，研究的维数数决定了平衡微分方程中应力的个数。其次确定平衡微分方程中应力所在方向，以 x 轴方向为例，则应力的第二个下标和体力的下标为 x，写成方程如下式：

$$\sigma_{-x}+\sigma_{-x}+\sigma_{-x}+f_x=0 \tag{4}$$

2. 确定应力第一个下标

结合数学中的排列组合原理，研究三维问题时，应力的第一个下标可分别x，y和z。将x，y和z填入（4）式中横线位置处，并将下标不相同的 σ 改写为 τ 可得：

$$\sigma_{xx}+\tau_{yx}+\tau_{zx}+f_x=0 \tag{5}$$

3. 添加偏导符号

（5）式中应力的第一个下标表示作用面的法向方向，亦即由于作用面改变应力坐标的增量方向。而平衡微分方程中的偏导项正是由于应力坐标的增加而产生作用项，因此，应力的任一方向坐标产生了增量，则偏导数将出现在该平衡微分方程中对应的向。即平衡微分方程中的应力将对第一个下标进行求偏导，由此对（5）式进行改写，将得到 x 轴方向的平衡微分方程：

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+f_x=0$$

同理，可写出 y 和 z 方向上的平衡微分方程。

四、结束语

本文从《弹性力学》中平衡微分方程的教学过程出发，提出物理意义与数学推导并重的教学方法，并将该方法运用于弹性力学课程的教学中。贵州理工学院采矿231和采矿232班教学实践表明，通过引入应力下标的物理意义，可提升学生对平衡微分方程的掌握程度，有利于应用平衡微分方程解决弹性力学问题能力的培养。工科中存在着大量与数学结合十分密切的力学课程，如：《工程力学》、《工程流体力学》和《结构力学》等课程。通过物理意义的引入与穿插，平衡教学过程中纯数学推导的占比，可有效提升学生对课程的学习效率和掌握程度，激发学生对课程的学习兴趣，强化力学课程的育人效果。

参考文献

[1] 张伟伟，田锦邦 . 弹性力学的三段式教学方法 [J]. 力学与实践 ,2017,39(02):191-195.

[2] 赵春香，南景富 .《弹性力学》教学改革的探索与实践 [J]. 高教学刊 ,2016,(02):113-114.

[3] 楼文娟，梁洪超，杨骊先 .《弹性力学》课程教学改革探析 [J]. 高教论坛 ,2015,(07):40-44.

[4] 徐亚兰，马娟，陈永琴，等 . “大思政课”建设背景下研究生专业基础课程教学改革——以弹性力学为例 [J]. 高教学刊 ,2025,11(26):129-132.

[5] 王建祥，黄克服，陈伟球，等 . “弹”建模进阶，“力”与时偕行——力学领域“101 计划”弹性力学教材建设 [J]. 力学与实践 ,2025,47(05):893-897.

[6] 王骥，杜建科，马廷锋，等 . 研究生《弹性力学》课程中的难点根源及其对策思考 [C]// 中国力学学会，上海交通大学（SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY）. 中国力学大会 -2015 论文摘要集 . 宁波大学机械工程与力学学院 ,2015:66-67.

[7] 王敏中 . 弹性力学教学中的一点体会——关于科学兴趣的培养 [C]// 中国力学学会教育工作委员会 . 世纪之交的力学教学——教学经验与教学改革交流会论文集 . 北京大学力学与工程科学系 ,2000:194-195.

[8] 李伟，于献彬 . 融合思政和专业培养目标的弹性力学教学改革探讨 [J]. 科学咨询 ,2024,(16):140-143.

[9] 杨志强，刘一志，荆宇航 . “四新”建设背景下弹性力学课程教学体系改革和实践 [J]. 大学教育 ,2024,(15):52-56.

[10] 徐亚兰，郭空明，陈永琴，等 . 弹性力学研究生课程教学与人才培养协同的探索及实践 [J]. 高教学刊 ,2023,9(35):155-158.

[11] 弹性力学简明教程 (第五版)[M]. 徐芝纶 . 北京：高等教育出版社 ,2023:5.

[12] 弹性力学教材 (修订版)[M]. 王敏中，王炜，武际可 . 北京：北京大学出版社 ,2020:51.

