

康托尔对弗雷格《算术基础》的批判： 集合论与逻辑主义的交锋

孙艳

吉林财经大学, 吉林 长春 130117

DOI: 10.61369/TACS.2025070003

摘 要 : 19 世纪末, 数学基础研究迎来了重大变革, 格奥尔格·康托尔 (Georg Cantor) 的集合论与戈特洛布·弗雷格 (Gottlob Frege) 的逻辑主义算术理论成为这一时期的标志性成果。然而, 两者之间的理论冲突却为数学基础危机埋下了伏笔。本文以康托尔对弗雷格《算术基础》的批判为核心, 通过梳理弗雷格逻辑主义算术的构建逻辑、康托尔集合论的核心思想, 系统分析康托尔批判的具体内容与理论依据, 并探讨这一批判对 20 世纪数学基础研究的深远影响。研究发现, 康托尔的批判不仅揭示了弗雷格理论中“概念外延”的逻辑缺陷, 更预示了集合论悖论的必然性, 为后来罗素悖论的提出与公理化集合论的发展提供了重要启示。

关 键 词 : 康托尔; 弗雷格; 集合论; 逻辑主义; 数学基础

Cantor's Critique of Frege's "The Foundations of Arithmetic": The Confrontation Between Set Theory and Logicism

Sun Yan

Jilin University of Finance and Economics, Changchun, Jilin 130117

Abstract : At the end of the 19th century, research on the foundations of mathematics witnessed significant transformations. Georg Cantor's set theory and Gottlob Frege's logicist theory of arithmetic emerged as landmark achievements of this period. However, the theoretical conflicts between the two laid the groundwork for a crisis in the foundations of mathematics. Focusing on Cantor's critique of Frege's "The Foundations of Arithmetic", this paper systematically analyzes the specific content and theoretical basis of Cantor's critique by sorting out the construction logic of Frege's logicist arithmetic and the core ideas of Cantor's set theory, and explores the profound impact of this critique on research into the foundations of mathematics in the 20th century. The study reveals that Cantor's critique not only exposed the logical flaws in the "extension of concepts" within Frege's theory but also predicted the inevitability of set-theoretic paradoxes, providing important insights for the subsequent formulation of Russell's paradox and the development of axiomatic set theory.

Keywords : Cantor; Frege; set theory; logicism; foundations of mathematics

引言

19 世纪是数学史上的“英雄时代”, 微积分的严格化、非欧几何的诞生与代数结构的深化共同推动着数学向抽象化、系统化方向发展。在这一进程中, “数学基础”问题逐渐成为数学家关注的焦点: 算术作为数学的基础, 其自身的基础是什么? 是经验归纳、直觉构造还是逻辑演绎? 针对这一问题, 两位德国学者给出了截然不同的答案——戈特洛布·弗雷格试图将算术还原为逻辑, 开创了“逻辑主义”学派; 格奥尔格·康托尔则通过对无穷集合的研究创立了集合论, 为数学提供了全新的基础框架。^[1]

1884 年, 弗雷格发表《算术基础》(Grundlagen der Arithmetik), 系统阐述了其逻辑主义纲领: 通过“概念的外延”定义自然数, 进而将全部算术命题还原为逻辑命题。1885 年, 康托尔在《德意志文学报》(Deutsche Literaturzeitung) 发表书评, 对弗雷格的理论提出了尖锐批判。这一批判看似是学术观点的分歧, 实则反映了两种数学哲学的根本冲突: 弗雷格坚持逻辑的严格性与确定性, 试图为数学寻找不可置疑的“第一原理”; 康托尔则突破传统逻辑的束缚, 以“实无穷”为研究对象, 构建了充满创造性与争议的集合论体系。^[2]

本文将以康托尔的批判为切入点, 深入分析两位学者在数的定义、无穷概念、逻辑与数学关系等问题上的分歧, 揭示这场学术交锋对 20 世纪数学基础研究的决定性影响。正如数学史家莫里斯·克莱因 (Morris Kline) 所言, 19 世纪末的数学基础争论, 本质上是一场关于“数学合法性”的重新界定——究竟是逻辑的严格性还是创造性的直觉, 应当成为数学发展的主导原则? 康托尔与弗雷格的交锋, 正是这一争论的集中体现。^[3]

作者简介: 孙艳, (1971-), 女, 汉族, 吉林长春人, 博士研究生, 吉林财经大语言文化学院副教授, 教研室主任, 研究方向: 语言哲学。

一、弗雷格的逻辑主义算术基础

弗雷格的逻辑主义纲领源于对当时数学基础混乱状态的不满。在他看来，算术的“基础危机”并非技术层面的问题，而是哲学层面的混淆——数学家们要么将数视为经验归纳的产物，如约翰·斯图尔特·密尔（John Stuart Mill），要么将数视为心理直觉的创造，如伊曼努尔·康德（Immanuel Kant），却始终未能认识到：算术的本质是逻辑。《算术基础》的核心目标，便是通过纯粹逻辑的概念与命题，构建完整的算术体系。^[4]

（一）逻辑主义的基本立场

弗雷格在《算术基础》中提出了三条基本原则，构成了其逻辑主义的方法论基础。

反心理主义：始终将心理的东西和逻辑的东西、主观的东西和客观的东西严格区别开来。在他看来，数不是心理活动的产物，而是客观存在的逻辑对象，正如“真”不是主观信念而是客观的逻辑属性。例如，“ $2+3=5$ ”的真理性不依赖于人类的认知过程，而在于其逻辑结构的必然性。^[5]

语境原则：只有在句子的语境中，而不是在孤立的词中，才能找到词的意义。这一原则直接针对传统哲学对“数”的孤立探讨，主张通过数在命题中的作用（即“数的应用”）来揭示其本质。弗雷格举例说明：孤立的“3”毫无意义，只有在“桌上有3本书”这类命题中，“3”才通过对“桌上的书”这一概念的限定获得意义。^[6]

反形式主义：反对将算术还原为符号操作的形式主义观点，强调符号的意义必须通过逻辑定义来确定。弗雷格指出，形式主义者“像一个只知道如何建造机器却不理解其工作原理的工程师”，无法真正解决算术的基础问题。他批判当时的形式主义者，如赫尔曼·格拉斯曼（Hermann Günther Grassmann），仅关注符号的组合规则，却忽视了符号背后的逻辑内涵，这使得算术沦为“无意义的符号游戏”。^[7]

这三条原则共同指向一个核心：算术的客观性源于逻辑的客观性，而逻辑的客观性则体现在其普遍有效性与非时空性中。弗雷格坚信，只要能从逻辑出发严格定义自然数，并证明算术公理（如皮亚诺公理）是逻辑定理，就能彻底解决算术的基础问题。^[8]

（二）数的定义：从“等数性”到“概念的外延”

弗雷格对自然数的定义始于对“等数关系”的分析。他注意到，当我们说“桌上的苹果数等于椅子数”时，并不需要知道具体的数字，只需通过“一一对应”即可确定两者的数量相等。这一观察使他认识到：等数性是比数更基本的概念，可以通过逻辑中的“双射”（bijection）概念来定义。具体而言，若概念F与概念G的外延之间存在一一对应关系（即“属于F的对象与属于G的对象一样多”），则称F与G是“等数的”。弗雷格进一步指出，“数”本质上是“等数关系”的抽象——正如“方向”是“平行关系”的抽象（“直线a与直线b平行”等价于“a的方向等于b的方向”），“数”也是“等数性”的抽象结果。因此，“属于概念F的数”可以定义为：“与概念F等数的所有概念构成的集合”（即“等数类”）。^[9]

以“0”的定义为例，弗雷格首先定义“空概念”，“空概念”是指没有任何对象满足其描述的概念，其外延是空集（ $\emptyset$ ），然后，运用“空概念”和“等数关系”，将“0”定义为“与空概念等数的所有概念的外延”。由于没有任何对象满足“不与自身同一”，所有空概念（如“圆的正方形”）的外延便构成了0。在此基础上，通过“后继”概念可以定义所有自然数：“数n是数m的后继”，当且仅当存在一个对象x，使得“包含x的概念”比“不包含x的概念”多一个元素。例如，找到一个概念F，使其“数”为1，且存在对象x，使得“属于F且不等于x”的概念是“空概念”（数为0），因此，“1是0的后继”。

弗雷格证明，通过这一定义可以推导出皮亚诺公理的全部内容，包括“每一个数都有唯一的后继”“没有两个数有相同的后继”等核心命题，从而完成了从逻辑到算术的还原第一步。^[10]

（三）概念的外延：逻辑与数学的连接点

弗雷格理论的核心工具是“概念的外延”。在他的逻辑系统中，“概念”是具有真值的函数（如“x是偶数”是一个概念，当x取2时为真，取3时为假），而“概念的外延”则是所有使该函数为真的对象构成的集合。例如，“偶数”这一概念的外延，便是 $\{2, 4, 6, \dots\}$ 。

弗雷格强调，“外延”是纯粹的逻辑概念，因为它仅依赖于概念的真值条件，而不涉及任何具体的经验对象。通过将数定义为“概念外延的类”，他试图证明：数的本质是逻辑，算术命题的真理性源于逻辑的真理性。这一思路在《算术基础》中得到了初步实现，并在后续的《算术的基本法则》（Grundgesetze der Arithmetik）中被进一步形式化——弗雷格引入了“基本法则V”，明确规定：“两个概念的外延相等，当且仅当它们的外延所包含的对象完全相同”，即： $\varepsilon F(\varepsilon) = \varepsilon G(\varepsilon) \Leftrightarrow \forall x (F(x) \Leftrightarrow G(x))$ 。

这一法则看似是对“外延”的同义反复，实则是弗雷格从逻辑过渡到数学的关键桥梁。正是通过“基本法则V”，他将“数”这一数学对象与“概念的外延”这一逻辑对象等同起来，为逻辑主义纲领奠定了形式基础。^[11]

二、康托尔的集合论与无穷理论

与弗雷格不同，康托尔的集合论并非源于对“逻辑严格性”的追求，而是源于对无穷级数与三角级数的研究。在解决“唯一性问题”（即一个函数的三角级数展开是否唯一）的过程中，康托尔发现：传统的“潜无穷”概念（即无穷是一个永远无法完成的过程）无法解释复杂集合的性质，必须引入“实无穷”——将无穷视为一个已经完成的、可以作为整体研究的对象。这一突破不仅开创了集合论，更彻底改变了人类对“无穷”的理解。^[12]

（一）集合的定义与基数理论

康托尔在1874年的《关于一切代数实数的一个性质》中首次提出了集合的概念：“一个集合是我们的直观或思想中确定的、可区分的对象的总体。”这一定义强调集合的三个特征：确定性（对象是否属于集合是明确的）、可区分性（对象之间存在差异）、

总体性（对象构成一个整体）。与弗雷格的“概念外延”相比，康托尔的集合概念更为宽泛——它不仅包括逻辑概念的外延，还包括通过直观或思想把握的任何“总体”，如“所有行星的集合”“所有自然数的集合”等。

基数（Cardinal number）是康托尔集合论的核心概念，用于衡量集合的“大小”。他通过“一一对应”定义基数的相等：若集合 A 与集合 B 的元素之间存在一一对应关系，则称 A 与 B 具有相同的基数（记为 $|A|=|B|$ ）。这一定义看似与弗雷格的“等数性”相似，实则存在本质区别：弗雷格的“等数性”是概念之间的关系，最终要还原为逻辑；康托尔的基数则是独立的数学对象，是对集合“大小”的抽象表征。

康托尔的革命性贡献在于证明了无穷集合存在不同的基数。他通过对角线方法证明：实数集的基数大于自然数集的基数（即连续统假设的雏形），从而打破了“无穷只有一种”的传统观念。具体而言，自然数集的基数记为 $\aleph_0$ （阿列夫零），而实数集的基数记为 c （连续统基数），康托尔证明 $c > \aleph_0$ 。他进一步提出，无穷基数构成一个无限序列： $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$ ，其中每个基数都是前一个基数的“幂集”（即所有子集构成的集合）的基数。这一理论不仅解决了长期困扰数学的“无穷悖论”，更为分析学、拓扑学等领域提供了强大的工具。^[13]

（二）实无穷与超穷数理论

康托尔的集合论建立在“实无穷”的基础上，这与当时占主导地位的“潜无穷”观念形成了直接对立。亚里士多德以来，数学家们普遍认为：无穷只能是“潜在的”（如自然数可以无限延伸，但永远无法完成），而“实无穷”（如所有自然数构成的集合）是逻辑上自相矛盾的。康托尔则通过严格的数学证明，论证了实无穷的合法性。

他在 1883 年的《集合论基础》中引入了“超穷数”（Transfinite numbers）概念，将无穷分为不同的“阶”：

第一数类：所有有限基数（1, 2, 3, ...）

第二数类：所有可数无穷基数（ $\aleph_0$ 是最小的超穷基数）

第三数类：所有不可数无穷基数（ $\aleph_1$ 是最小的不可数基数）^[8]

p.92]

超穷数不仅是对无穷的量化，更具有自身的运算规律（如 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ ）。康托尔将超穷数视为“上帝的启示”，坚信其客观实在性——正如有限数是对有限集合的抽象，超穷数是对无穷集合的抽象，两者都是数学研究的合法对象。这一观点遭到了当时许多数学家的反对，如利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker），但康托尔始终坚持，数学的本质在于其自由——我们只受逻辑无矛盾性的约束，而不受传统观念的限制。^[14]

（三）康托尔集合论的哲学倾向

康托尔的集合论不仅是数学理论，更蕴含着深刻的哲学立场。与弗雷格的逻辑主义不同，他并不试图将数学还原为某种“更基础”的学科（如逻辑），而是主张数学的自主性与创造性。在他看来，数学对象的存在性不取决于逻辑的可定义性，而取决于其在数学系统中的一致性与解释力。

这种立场直接体现在他对“集合”与“类”的区分上。康托

尔晚年意识到，并非所有“总体”都能构成集合——若一个总体包含自身作为元素（如“所有集合的集合”），就会导致逻辑矛盾。因此，他将“集合”定义为“能够被无矛盾地视为一个整体的总体”，而将那些会导致矛盾的总体称为“真类”。这一区分虽然尚未形成严格的形式化定义，却为后来公理化集合论中的“集合”与“类”的区分提供了思想雏形，如冯·诺依曼（John von Neumann）在 1925 年的公理系统中明确区分了“集合”（可作为元素）与“类”（不可作为元素）。

三、康托尔对弗雷格的具体批判

1885 年，康托尔在《德意志文学报》发表了对《算术基础》的书评，篇幅虽短，却直击弗雷格理论的核心缺陷。这一批判主要围绕三个问题展开：弗雷格对“概念外延”的滥用、数的定义的非独立性、以及逻辑主义对数学创造性的压制。康托尔的批判不仅是学术观点的分歧，更是两种数学范式的碰撞——逻辑主义的“还原论”与集合论的“建构论”之间的对立。^[15]

（一）对“概念外延”的质疑

弗雷格将数定义为“概念外延的类”，而康托尔认为，“概念的外延”这一概念本身是模糊且危险的。在他看来，弗雷格混淆了“逻辑外延”与“集合”的本质区别：逻辑外延是附属于概念的，其存在依赖于概念的确定性；集合则是独立存在的整体，其元素可以通过直观或思想直接把握，无需依赖预先定义的概念。例如，“红色物体的集合”可以通过直观确定，而无需预先定义“红色”这一概念的精确内涵。

逻辑外延遵循“矛盾律”与“排中律”，一个对象要么属于外延，要么不属于；但集合的形成则依赖于“抽象原则”，即我们可以将不同对象视为一个整体，而不必预先规定严格的隶属条件。康托尔举例说明：“所有基数的集合”是一个合法的集合，但我们无法通过一个精确的概念来定义其外延，因为基数本身是不断生成的。

康托尔在书评中指出，弗雷格先生试图通过概念的外延来定义数，但他没有意识到，“外延”本身的合法性恰恰依赖于数的概念。这是一种循环论证——我们无法用一个需要数来界定的概念（外延）去定义数。例如，当我们说“概念 F 的外延包含 n 个对象”时，已经预设了“n”的存在，因此用“外延的类”定义数，本质上是在原地打转。

更严重的是，康托尔认为弗雷格的“概念外延”可能导致无穷倒退。若数是概念外延的类，那么“类”本身又需要通过更高层次的概念来定义，这将陷入“外延的外延的外延...”的无限循环。相比之下，他的基数概念通过“一一对应”直接定义，无需依赖任何预设的逻辑概念，从而避免了这种倒退。

（二）对“数的逻辑定义”的批判

弗雷格试图将数还原为逻辑对象，而康托尔则坚持数的数学自主性。在他看来，数（包括超穷数）是数学研究的原生对象，其本质无法被逻辑概念完全捕捉。具体而言，康托尔对弗雷格数定义的批判集中在两点：

定义的非建设性：弗雷格的定义是“分析性”的，即通过概念的外延分析数的本质，但无法解释数的“生成性”——我们如何从 0 出发，通过后继运算生成所有自然数？康托尔的基数理论则是“建设性”的，通过集合的并、交、幂集等运算，不仅能定义自然数，还能生成超穷数，从而为数学提供了更丰富的对象域。例如，通过幂集运算，我们可以从自然数集（基数 $\aleph_0$ ）生成实数集（基数 $2^{\aleph_0}$ ），这一过程是建设性的，而弗雷格的定义无法解释这种生成机制。

无穷数的缺失：弗雷格的定义仅适用于有限数，无法处理超穷数。在《算术基础》中，弗雷格虽然承认无穷集合的存在（如“所有自然数的集合”），但始终将其视为“潜在的”，拒绝承认超穷数的合法性。康托尔指出，这种态度会导致数学的“跛足”——若不能正视实无穷，分析学中的许多问题（如函数的连续性、积分的定义）将无法得到彻底解决。例如，黎曼积分（Riemann Integral）的定义依赖于对实数集结构的理解，而实数集的基数问题是弗雷格的理论无法处理的。

康托尔在 1899 年给理查德·戴德金（Richard Dedekind）的信中进一步强调，弗雷格的逻辑主义就像试图用几何学来定义算术——虽然两者存在关联，但本质上属于不同的数学分支。数的概念比逻辑概念更为基础，因为逻辑本身的表达依赖于数的概念（如‘所有’‘存在’等量词的意义，本质上与基数相关）。”

（三）对逻辑主义哲学基础的否定

康托尔的批判不仅针对弗雷格的技术层面，更指向其逻辑主义的哲学基础——即“数学可以还原为逻辑”的信念。在他看来，这种还原论是对数学本质的误解：

逻辑与数学的关系：逻辑是数学的“工具”而非“基础”。逻辑提供了推理的规则，但数学的对象（如集合、数、函数）则源于人类的创造性直觉，无法被逻辑规则完全限定。正如工匠需要工具，但工具不能决定工匠创造什么，逻辑也不能决定数学的研究对象。康托尔认为，超穷数的引入就是一个典型例子——它无法通过传统逻辑规则推导出来，而是源于对无穷集合的创造性洞察。

“第一原理”的虚妄：弗雷格试图为数学寻找不可置疑的“第一原理”（如基本法则 V），但康托尔认为，数学的发展恰恰是对“第一原理”的不断突破。从非欧几何对平行公理的否定，到超穷数对传统无穷观念的超越，数学的进步总是源于对“自明性”的质疑。他在《论超穷数理论》中写道，数学的真理不是凝固的教条，而是不断扩展的疆域，任何试图为其划定边界的尝试都是徒劳的。

矛盾的建设性：弗雷格将矛盾视为理论的“致命缺陷”，而康托尔则认为，矛盾在数学发展中具有建设性意义。他在研究“所有集合的集合”时发现了悖论，但并未因此放弃集合论，而是通过区分“集合”与“真类”来化解矛盾，这一过程恰恰推动了集合论的深化。康托尔预见，弗雷格的体系若严格遵循“概念外延”的无限制使用，必将导致更严重的矛盾——这一预见在 1902 年罗素悖论中得到了证实。

康托尔的这些观点，预示了后来希尔伯特的形式主义与哥德

尔不完备定理的思想——数学不可能被完全还原为逻辑，任何足够丰富的数学系统都无法同时满足一致性与完全性。

四、弗雷格的回应与理论困境

面对康托尔的批判，弗雷格在《算术基础》第二版（1903 年）的序言中进行了简短回应，但并未完全接受康托尔的观点。他承认“概念外延”的概念需要进一步澄清，但坚持逻辑主义的基本立场。然而，1902 年罗素悖论的出现，却证实了康托尔的担忧——弗雷格基于“概念外延”构建的体系，确实存在无法克服的逻辑矛盾。

（一）弗雷格对康托尔批判的初步回应

弗雷格在《算术基础》第二版序言中承认，康托尔对“概念外延”的质疑具有一定合理性，但他认为这一问题可以通过更精确的逻辑定义来解决。他写道，康托尔先生指责我滥用了‘概念的外延’，这一点我部分接受——我确实没有充分区分‘外延’与‘集合’。但我坚持认为，数的逻辑定义是可能的，只需更严格地规定概念外延的形成规则。”

弗雷格的回应体现了他对逻辑严格性的执着。他不否认集合论的价值，但认为集合论本身需要逻辑基础——集合的概念最终必须还原为概念的外延，否则将陷入“直观主义”的泥潭。在他看来，康托尔的集合论过于依赖“直观”，缺乏逻辑的严格性，这正是其面临“悖论威胁”的根源（尽管此时罗素悖论尚未提出）。例如，康托尔对“集合”的定义依赖于“直观或思想中的对象”，这在弗雷格看来是模糊的，因为“直观”本身是主观的，无法保证集合的客观性。

为了回应康托尔的“循环论证”指责，弗雷格在《算术的基本法则》中试图通过“基本法则 V”避免循环。该法则规定，概念外延的相等由概念的等价性决定，而无需预设数的概念。然而，这一尝试最终失败了，因为基本法则 V 本身就蕴含着矛盾。

（二）罗素悖论与弗雷格体系的崩溃

1902 年，伯特兰·罗素在给弗雷格的信中指出：根据弗雷格的基本法则 V，会导致一个不可避免的矛盾——“所有不属于自身的集合组成的集合，是否属于自身？”若属于，则它不应该属于；若不属于，则它应该属于。这一悖论直接击中了弗雷格体系的核心——“概念的外延”可以无限制地构成新的集合，而无需考虑其是否会导致矛盾。

弗雷格在收到罗素的信后，意识到问题的严重性。他在《算术的基本法则》第二卷的附录中写道，一位科学家所能遇到的最不幸的事，莫过于在他的工作即将完成时，发现自己的大厦基础崩溃了。罗素先生的来信使我陷入了这样的境地。尽管弗雷格试图通过修改基本法则 V 来化解矛盾（如限制概念外延的适用范围），但最终未能成功——任何修改都会破坏逻辑主义的还原目标，使数的定义不再纯粹基于逻辑。

罗素悖论的出现，从实践层面证实了康托尔对“概念外延”滥用的担忧。康托尔虽然没有明确提出罗素悖论，但他对“所有集合的集合”会导致矛盾的认识，与罗素悖论的本质是一致的。

这表明，康托尔的集合论虽然也面临悖论问题，但他通过“集合”与“真类”的区分，为避免悖论提供了更灵活的解决方案，而弗雷格的逻辑主义由于坚持“概念外延”的普遍性，反而更难应对这类矛盾。

（三）弗雷格后期的思想调整

罗素悖论之后，弗雷格逐渐意识到逻辑主义纲领的局限性。在晚年的《数学中的逻辑》（1914）中，他承认，将数还原为逻辑的尝试，或许从一开始就走错了方向。数可能既不是逻辑对象，也不是物理对象，而是一种独立的‘抽象对象’，其存在性需要通过数学实践来证明。

这一调整虽然未能挽救逻辑主义的失败，却为后来的数学哲学提供了重要启示。弗雷格开始认识到，数学的基础可能不是单一的（如逻辑），而是多元的——逻辑、直觉、经验都在数学基础中扮演着角色。这种多元论立场，与康托尔强调数学自主性的观点，在某种程度上达成了和解。

弗雷格在晚年的笔记中写道，康托尔的集合论或许为我们提供了一条新的道路，尽管它目前还不够完善，但至少摆脱了逻辑主义的教条。数学的基础问题，可能需要我们重新思考逻辑与直觉、严格性与创造性的关系。这一反思标志着弗雷格从严格的逻辑主义向更温和的数学哲学立场的转变，也间接承认了康托尔批判的价值。

五、批判的历史意义与影响

康托尔对弗雷格的批判，不仅是两位学者之间的学术分歧，更标志着数学基础研究的范式转换。这场批判的意义远超其具体内容，它揭示了数学基础中几个核心问题的复杂性：无穷的本质、逻辑与数学的关系、数学对象的存在性等。这些问题的探讨，直接推动了 20 世纪数学基础的三大流派——逻辑主义、形式主义与直觉主义的形成与发展。

（一）对集合论发展的推动

康托尔的批判与其自身集合论的完善是同步的。为了回应弗雷格对“集合”概念模糊性的指责，康托尔晚年更加注重集合论的形式化与严格化，特别是对“集合”与“真类”的区分。这一工作为后来公理化集合论的建立提供了直接动力。

1908 年，恩斯特·策梅洛（Ernst Zermelo）发表《集合论基础研究》，提出了第一个集合论公理系统（Z 系统），通过“分离公理”（即只有通过已有的集合与明确的性质才能定义新的集合）避免了罗素悖论。该公理规定，对于任何集合 A 和性质 P，存在一个集合 B，其元素是 A 中所有满足 P 的元素。这一规定直接限制了“概念外延”的无限制使用，从而避免了“所有不属于自身的集合”这类悖论的产生。

后来，亚伯拉罕·弗兰克尔（Abraham Fraenkel）等人对 Z 系统进行了补充，形成了现在通用的 ZFC 公理系统（策梅洛-弗兰克尔系统+选择公理）。ZFC 系统通过限制集合的形成方式（禁止“所有集合的集合”这类真类成为集合），既保留了康托尔集合论的核心成果（如基数、序数理论），又避免了悖论的产生。

这一系统的建立，本质上是对康托尔与弗雷格之争的回应——它既吸收了弗雷格对逻辑严格性的要求（通过公理系统保证一致性），又继承了康托尔对集合自主性的坚持（将集合视为独立的数学对象）。正如数学史家王浩所言，ZFC 系统是两种传统的融合——弗雷格的逻辑严格性与康托尔的集合创造性，在公理系统中达成了平衡。

（二）对逻辑主义的修正与影响

尽管弗雷格的逻辑主义纲领因罗素悖论而失败，但康托尔的批判与罗素悖论共同推动了逻辑主义的修正与发展。罗素本人在《数学原理》（Principia Mathematica）中，试图通过“类型论”解决悖论，并继续推进逻辑主义纲领：

类型论：将集合分为不同的“类型”，类型 n 的集合只能包含类型 n-1 及以下的对象，从而避免了“自我指涉”的悖论。例如，“所有不属于自身的集合”在类型论中是不合法的，因为它试图包含自身作为元素。

可化归性公理：为了保证数学命题的可表达性，罗素引入了“可化归性公理”，允许在一定条件下将高阶类型的命题化归为低阶类型。这一公理虽然简化了类型论的应用，却牺牲了逻辑的纯粹性，因为它不是一个自明的逻辑真理。

然而，类型论的复杂性与可化归性公理的非逻辑性，使得《数学原理》中的逻辑主义已经偏离了弗雷格的初衷——它不再是“将数学还原为纯逻辑”，而是“将数学还原为逻辑+集合论”。这一修正实际上承认了康托尔的观点：集合论无法被完全还原为逻辑，它在数学基础中具有独立地位。

逻辑主义的后续发展，如鲁道夫·卡尔纳普（Rudolf Carnap）的“逻辑句法”进一步弱化了还原目标，转而强调逻辑与数学的连续性，而非严格的还原关系。卡尔纳普在《语言的逻辑句法》中提出，数学是“语言的句法规则”，这一立场虽然仍属于逻辑主义传统，却不再追求弗雷格式的严格还原，而是试图通过逻辑句法统一逻辑与数学。这一转变，在某种程度上是对康托尔批判的间接接受。

（三）对数学哲学的深远影响

康托尔与弗雷格的交锋，深刻影响了 20 世纪数学哲学的走向。它揭示了数学基础研究中几个无法回避的问题：

无穷问题的不可避免性：无论是算术还是集合论，都无法绕开无穷概念。康托尔的实无穷理论虽然解决了部分问题，但无穷的本质（如连续统假设的独立性）至今仍是未解之谜。1963 年，保罗·约瑟夫·科恩（Paul Joseph Cohen）证明连续统假设在 ZFC 系统中是独立的，这意味着我们可以同时接受或否定它而不导致矛盾，这一结果印证了康托尔的预见——无穷的本质比逻辑主义所能把握的更为复杂。

逻辑的局限性：哥德尔不完备定理（1931）证明，任何足够丰富的数学系统都无法通过自身的逻辑规则证明其一致性，这从根本上否定了弗雷格“逻辑可以为数学提供终极基础”的信念，也印证了康托尔对逻辑主义局限性的预见。哥德尔定理表明，数学的发展需要不断引入新的公理（如大基数公理），而这些公理的合法性无法通过逻辑证明，只能依赖于其在数学实践中的解释

力——这一观点与康托尔的“数学自由”理念高度一致。

数学的多元性：20 世纪的数学哲学逐渐放弃了对“唯一基础”的追求，转而承认数学基础的多元性——逻辑、集合论、范畴论等都可以作为数学的基础，具体选择取决于研究目的与语境。这种多元性立场，正是康托尔“数学自由”理念的当代体现。例如，范畴论在代数几何中的成功应用表明，数学基础可以是动态的、多元的，而非固定的、唯一的。

六、结论

康托尔对弗雷格的批判，是 19 世纪末数学基础研究的关键事件。这场批判不仅揭示了弗雷格逻辑主义算术的内在缺陷（如概念外延的模糊性、无穷处理的局限性），更展现了两种数学哲学的根本分歧：弗雷格坚持逻辑的严格性与还原论，试图为数学寻找永恒不变的基础；康托尔则主张数学的自主性与创造性，将集

合论视为数学自由创造的产物。

从历史角度看，康托尔的批判具有前瞻性——它不仅预示了罗素悖论的出现，还推动了集合论的公理化进程，为 20 世纪数学基础研究奠定了基础。弗雷格的逻辑主义虽然未能实现其最初目标，但其对概念精确性、推理严格性的追求，深刻影响了分析哲学与现代逻辑学的发展。正如数学史家汉斯·赫尔曼·外尔（Hans Hermann Weyl）所言，康托尔与弗雷格的争论，不是一场‘胜负之争’，而是一场‘互补之争’——他们分别揭示了数学的两个本质维度：创造性与严格性，两者缺一不可。

今天，当我们回顾这场百年前的学术交锋，更应认识到：数学的进步既需要弗雷格式的“奠基者”，为混乱的理论寻找清晰的逻辑基础；也需要康托尔式的“开拓者”，突破传统的束缚，探索未知的数学领域。正是这两种力量的张力，推动着数学在“严格性”与“创造性”之间不断前进，展现出其作为“科学皇后”的永恒魅力。

参考文献

- [1] 贺福利. Cantor 集的几个性质及其证明 [J]. 高等函授学报（自然科学版）2003（3）.
- [2] 夏雪，吴杰. Cantor 集在构造反例中的应用 [J]. 高等函授学报（自然科学版）2004（2）.
- [3] 刘小洋，江南. Cantor 集的性质及应用 [J]. 连云港师范高等专科学校学报 2004（2）.
- [4] [德] 弗雷格. 算术基础 [M], 王路译. 北京：商务印书馆，1992.
- [5] [德] 弗雷格. 《算术基本规律》序言. [J]. 刘靖贤译. 世界哲学，2014（3）.
- [6] 王路. 弗雷格思想研究 [M]. 北京：商务印书馆，2008.
- [7] [英] 罗素. 数理哲学导论 [M]. 晏成书译. 北京：商务印书馆，2010.
- [8] Cantor, G. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen[J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1874.
- [9] Cantor, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten(1) [J]. Mathematische Annalen, 1879.
- [10] Cantor, G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (2) [J]. Mathematische Annalen. 1897.
- [11] Cantor, G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers[M]. New York: Dover. 1915.
- [12] Cantor, G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen inhalts[M]. Zermelo.E. (ed.) Berlin: Springer. 1932.
- [13] Myrvold W. Peirce on Cantor's Paradox and the Continuum [J]. Transactions of the Charles S. Peirce Society, 1995(3).
- [14] Dummett, M. Frege and Other Philosophers[M]. London: Oxford University Press, 1991.
- [15] Sullivan, Arthur. Logicism and Philosophy of Language [M]. Peterborough: Broadview Press, 2003.