

Cahn-Hillard 方程的虚拟元方法

周莹莹

华北水利水电大学, 河南 郑州 450046

DOI:10.61369/EST.20240800011

摘 要 : 本文提出使用 C^0 连续的非协调虚拟元方法求解二维的 Cahn-Hillard 方程. 该虚拟元方法降低了经典虚拟元方法对连续性的要求. 本文利用自由度生成三种投影算子, 再利用投影算子建立半离散格式, 最后对生成的半离散格式进行误差估计。

关 键 词 : 虚拟元方法; Cahn-Hillard 方程; 误差估计

Virtual Element Method for Cahn-Hillard Equations by

Zhou Yingying

North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou, Henan 450046

Abstract : This paper proposes a continuous C^0 uncoordinated virtual element method for solving the two-dimensional Cahn-Hillard equation. The proposed method reduces the continuity requirements of classical virtual element methods. We generate three projection operators using degrees of freedom, establish a semi-discrete scheme through these operators, and finally perform error estimation on the resulting semi-discrete scheme.

Keywords : virtual meta-method; Cahn-Hillard equation; error estimation

一、引言

本文考虑二维 Cahn-Hillard 方程^[1]:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta(\phi(u) - \varepsilon^2 \Delta u) = 0, & \Omega \times (0, T], \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), & \Omega, \\ \partial_n u = 0, \partial_n(\phi(u) - \varepsilon^2 \Delta u) = 0, & \partial\Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\Omega \in \mathbb{R}^2$, 边界为 $\partial\Omega$, n 为单位外法向量, 时间 $T > 0$, 自由能 $\psi(x) = \frac{1}{4}(1-x^2)^2$, 而 $\phi(x) = \psi'(x)$. 在 H^{-1} 梯度流下, 我们考虑 Cahn-Hillard 方程的总能量为:

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(\psi(u) + \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 \right) dx.$$

其中 Cahn-Hillard 方程是满足总质量守恒 $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = 0$ 和总能量耗散, 即

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \int_{\Omega} |Dw|^2 dx \leq 0.$$

Cahn-Hilliard 方程最初用来描述合金聚合物相分离的演化过程^[2]. Cahn-Hilliard 方程的虚拟元方法最早可以追溯到 2016 年, Antonietti, P. F. 等人首次提出能够应用在多边形网格上的 C_1 连续的虚拟元方法^[3]. 2017 年, Deng, Q., & Wei, H. 构建 H^2 协调虚拟元空间来求解 Cahn-Hilliard 方程^[4]. 2018 年, Antonietti, P. F. 等人, 引入了化学势作为中间变量, 使用 H^1 -VEM 同时离散相场变量和化学势, 降低了计算复杂度, 成为后续研究的主流方法^[5]. 2020 年 Han, D., Wang, X. 将混合 VEM 推广到时间依赖的 Cahn-Hilliard 方程, 并研究了不同时间离散格式的稳定性^[6]. 同年

Zhang, J., Yang, X. 将 VEM 与后验误差估计和自适应网格加密相结合, 在界面区域自动加密网格, 提高了计算效率^[7]. 2021 年 Li, Y., Chen, L. 设计出高阶时间离散和无条件能量稳定的数值格式^[8]. 2021 年 Wu, S., Li, M. 将 VEM 扩展到多物理场耦合问题^[9]. 2022 年 Liu, H., Gao, F. 考虑更复杂的各向异性 Cahn-Hilliard 方程, 考虑了界面能随方向变化的物理情景^[10]. 2023 年 Wang, K., He, X. 研究 VEM 离散后产生的大规模线性系统的高效求解器, 为实现大规模计算提供基础^[11].

本文使用 C_0 连续的非协调虚拟元方法求解 Cahn-Hillard 方程^[12]. 具体是对原始形函数空间进行扩大, 在对放大后的空间进行限制, 使修正后的虚拟元函数空间与原始的形函数空间具有相同的自由度. 利用虚拟元函数空间和自由度生成的三种投影算子, 再对该离散格式进行误差估计.

二、变分问题和基本公式表达

(一) 变分问题

定义空间 $V = \{v \in H^2(\Omega); \partial_n v = 0\}$,

然后 (1.1) 相应的变分问题为: 找到 $u \in V$, 满足

$$\begin{cases} \varepsilon^2 a(u, v) + (\partial_t u, v) + d(u; u, v) = 0, \forall v \in V, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in V, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $a(u, v) = (D^2 u, D^2 v) = \int_{\Omega} D^2 u : D^2 v dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$, 且 $a(u, v)$ 具有强制性连续性. $d(z; v, w) = \int_{\Omega} \phi'(z) Dv \cdot Dw dx$.

(二) 基本公式表达

记 T_h 是空间 Ω 的剖分, 其中 h_K 是多边形 $K \in T_h$ 的直径, $\mathcal{E}_h$ 是所有边的集合, 定义内积 $(v_h, w_h)_{T_h} = \sum_{K \in T_h} (D^* v_h, D^* w_h)_K$, 定义不连续的范数 $\|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in T_h} \|v_h\|_{L^2(K)}^2$. 定义跳跃算子 $[w]$, 在内部边 $[w] = w|_{K^+} - w|_{K^-}$, 在边界边 $[w] = w|_e$.

$a \lesssim b$ 代表 $a \leq Cb$.

对于整数 $l \geq 0, d \geq 1$, M_l^s 代表标度单项式集, $M_l^s = \left\{ \left(\frac{x - x_0}{h_e} \right)^\beta : |\beta| \leq l \right\}$, 其中 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ 为 d 重指标, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_d$ 和 $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_d^{\beta_d}$.

三、虚拟元离散

定义局部空间 $V_h^K = \{v \in H^2(K); \Delta^2 v \in P_{l-4}(K), v|_e \in P_l^e(e), \Delta v|_e \in P_{l-2}^e(e), \forall e \in \partial K\}$,

此时 $P_{-1}(K) = P_{-2}(K) = \{0\}$, 对于局部空间 V_h^K , 定义自由度如下:

$$\bullet v(a), \quad \forall \text{ 顶点 } a, \quad (3.1)$$

$$\bullet \frac{1}{h_e} \int q v ds, \quad \forall q \in M_{l-2}^e, \quad \forall \text{ 边 } e \quad (3.2)$$

$$\bullet \int q \frac{\partial v}{\partial n_e} ds, \quad \forall q \in M_{l-2}^e, \quad \forall \text{ 边 } e \quad (3.3)$$

$$\bullet \frac{1}{h_K^2} \int q v dx, \quad \forall q \in M_{l-4}^K \quad (3.4)$$

扩大 V_h^K , 将扩大空间记为 $\tilde{V}_h^K$,

扩大空间 $\tilde{V}_h^K = \{v \in H^2(K); \Delta^2 v \in P_{l-2}(K), v|_e \in P_l^e(e), \Delta v|_e \in P_{l-2}^e(e), \forall e \in \partial K\}$, 定义自由度如下:

$$\bullet v(a), \quad \forall \text{ 顶点 } a, \quad (3.5)$$

$$\bullet \frac{1}{h_e} \int q v ds, \quad \forall q \in M_{l-2}^e, \quad \forall \text{ 边 } e \quad (3.6)$$

$$\bullet \int q \frac{\partial v}{\partial n_e} ds, \quad \forall q \in M_{l-2}^e \quad (3.7)$$

$$\bullet \frac{1}{h_K^2} \int q v dx, \quad \forall q \in M_{l-4}^K \quad (3.8)$$

接着限制 $\tilde{V}_h^K$ 到 W_h^K , 使 W_h^K 与 V_h^K 有相同的维数,

$$W_h^K = \left\{ w \in \tilde{V}_h^K : (w - \pi_\Delta^K w, q)_K = 0, \forall q \in P_{l-2}(K) / P_{l-4}(K) \right\},$$

其中 $P_{l-2}(K) / P_{l-4}(K)$ 是 $P_{l-2}(K)$ 的子集, 包含于 $L_2(K)$ 正交于 $P_{l-4}(K)$, W_h^K 的自由度与 V_h^K 相同.

假设 H_0 : 对于每个单元 $K \in T_h$, 存在正常数 r , 使

- K 的最短边与直径 h_K 之比大于 r .
- 每个单元 $K \in T_h$ 相对于半径 $\geq rh_K$ 的球是星形的.

定义 3.1 对于 $v_h \in \tilde{V}_h^K$ 我们定义投影算子 $\pi_\Delta^K : \tilde{V}_h^K \rightarrow P_l(K) \subseteq \tilde{V}_h^K$, 解 π_Δ^K ,

$$\begin{cases} a_\Delta^K(\pi_\Delta^K \psi, q) = a_\Delta^K(\psi, q), \quad \forall q \in P_l(K) \\ \pi_\Delta^K \psi = \bar{\psi}, \\ \int_{\partial K} \pi_\Delta^K \psi ds = \int_{\partial K} \psi ds \end{cases}$$

其中 $\bar{\psi} = \frac{1}{n} \psi(a_i)$, $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为 K 的顶点, 对于 $\forall v \in P_l(K)$, 有 $\pi_\Delta^K v = v$.

定义 3.2 对于 $v_h \in \tilde{V}_h^K$ 我们定义投影 $\pi_0^K, \pi_0^e, \pi_\nabla^e$,
 • $\pi_0^K v_h \in P_{l-2}(K)$ 满足 $\int_K \pi_0^K v_h p dx = \int_K v_h p dx, \quad \forall p \in P_{l-2}(K)$.
 • $\pi_0^e v_h \in P_l^e(e)$ 满足 $\int_e \pi_0^e v_h p ds = \int_e v_h p ds, \quad \forall p \in P_{l-2}(e)$.
 • $\pi_\nabla^e v_h \in P_{l-1}(e)$ 满足 $\int_e \pi_\nabla^e v_h p ds = \int_e \partial_n v_h p ds, \quad \forall p \in P_{l-2}(e)$.
 全局虚拟元空间为:

$$W_h = \left\{ w \in H^1(\Omega); w|_K \in W_h^K, \forall K \in T_h, \int_e q \left[\frac{\partial w}{\partial n_e} \right] ds = 0, \forall q \in P_{l-2}(e), \forall e \in \mathcal{E}_h \right\},$$

其中, $W_h \subset H_0^2(\Omega)$ 但是 W_h 是 C^0 连续.

定义 3.3 定义投影算子 $\pi_\nabla^K : W_h^K \rightarrow P_l(K) \subseteq W_h^K$, 解 π_∇^K ,

$$\begin{cases} (\pi_\nabla^K \psi, q) = (\nabla \psi, q) \quad \forall q \in P_l(K) \\ \overline{\pi_\nabla^K \psi} = \bar{\psi}. \end{cases}$$

P_l^K 表示 $L^2(K) \rightarrow P_l(K)$.

定理 3.1 假设满足定义 3.2, 有以下结果成立:

- 对于 $\pi_0^K v_h = P_l^K(v_h), \pi_0^e v_h = P_l^e(Dv_h), \pi_\Delta^K v_h = P_{l-2}^K(D^2 v_h), \forall v_h \in W_h^K$.
- 对于 $P_l^K(K) \subset W_h^K$, 成立 $\pi_0^K p = p, \pi_\nabla^K p = Dp, \pi_\Delta^K p = D^2 p$,

$\forall p \in P_l(K)$.

定理 3.2 $L^2(K)$ 投影的性质^[13]: 满足网格假设 H_0 , 对于 $l \geq 0$ 和

$\forall w \in H^m(K)$, 并且 $1 \leq m \leq l+1$, $w - P_l^K w_{s,K} \leq h_K^{m-s} w_{m,K}$ 成立,

对于 $s=0, 1, 2$ 和 $s \leq m$, 每个 e 边被 $K^+, K^- \in T_h$ 所共用, $\forall w \in H^m(K^+ \cup K^-)$, 并且 $1 \leq m \leq l+1$, $|w - P_l^K w|_{L^2(e)} \leq h_e^{\frac{m-s}{2}} |w|_{m,K^+ \cup K^-}$ 成立.

四、误差分析和半离散格式

(一) 半离散格式

定义 4.1 对于 $v_h, w_h, z_h \in W_h$, 定义以下离散格式:

$$\begin{aligned} a_h^K(v_h, w_h) &= \int_K \pi_\Delta^K v_h : \pi_\Delta^K w_h dx + h_K^{-2} S^K(v_h - \pi_\Delta^K v_h, w_h - \pi_\Delta^K w_h), \\ m_h^K(v_h, w_h) &= \int_K \pi_0^K v_h : \pi_0^K w_h dx + h_K^2 S^K(v_h - \pi_0^K v_h, w_h - \pi_0^K w_h), \\ d_h^K(v_h, w_h) &= \int_K \phi'(z_h) \pi_\nabla^K v_h : \pi_\nabla^K w_h dx + S^K(v_h - \pi_\nabla^K v_h, w_h - \pi_\nabla^K w_h), \end{aligned}$$

其中双线性形 $S^K(v_h, w_h) = \sum_{i=1}^{N_h^K} \chi_i(v_h) \chi_i(w_h)$.

故半离散问题为找到 $u(\cdot, t) \in W_h$, 满足

$$m_h(\partial_t u_h, v_h) + \varepsilon^2 a_h(u_h, v_h) + d_h(\pi_0^K u_h; u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in W_h, a.e t \in (0, T), \quad (4.1)$$

其中 $u(\cdot, 0) = u_{h,0} \in W_h$, $u_{h,0}$ 是 u_0 的近似.

引理 4.1 一致性和稳定性:

一致性: 对于 $\forall p \in P_l(K)$ 且 $v_h \in W_h$, 有

$$\begin{aligned} a_h^K(p, v_h) &= a_h(p, v_h), \\ m_h^K(p, v_h) &= m_h(p, v_h). \end{aligned}$$

稳定性: 存在正常数 a^*, a_*, μ^*, μ_* , 且独立于 h, ε , 则有

$$\begin{aligned} a_* a^K(v_h, v_h) &\leq a^K(v_h, v_h) \leq a^* a^K(v_h, v_h), \\ \mu_* m^K(v_h, v_h) &\leq m^K(v_h, v_h) \leq \mu^* m^K(v_h, v_h). \end{aligned}$$

引理 4.2^[14] 满足网格假设 H_0 , 对于 $\forall w \in H^m(K)$, $s = 0, 1, 2$, $s \leq m \leq l+1$, 以下估计成立:

$$w - I_h w_{s,K} \leq h_K^{m-s} w_{m,K}.$$

引理 4.3 对于 $\forall w \in H^2(K)$, w^* 是最低阶 H^1 协调虚拟元空间的元素, 以下估计成立:

$$\|w - w^*\|_{0,K} + |w - w^*|_{0,K} \leq h_K^2 |w|_{2,K}.$$

4.2 误差分析

引理 4.4 对于问题 (2.1) 的解 $u \in H^{l+1}(\Omega)$, $w \in W_h$, $N(u, w) := \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a^K(u, w) - (\Delta^2 u, w)$, 则有 $|N(u, w)| \leq h^{l-1} |w|_{2,h}$ 成立.

证明: 将 $a^K(u, w)$, $(\Delta^2 u)_K$ 定义带入 $N(u, w)$, 再利用格林公式, 得到

$$N(u, w) = \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a^K(u, w) - (\Delta^2 u, w) = \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\partial K} \partial_\nu u \partial_\nu w n_\nu ds - \int_{\partial K} \partial_\nu (\partial_\nu u) w n_\nu ds \right\}.$$

由于 $\frac{\partial w}{\partial x_i} = (\partial_n w) n_i + (\partial_s w) \tau_i$, $\Delta u = \partial_n^2 u + \partial_s^2 u$, 故上式第一部分为:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \partial_\nu u \partial_\nu w n_\nu ds &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} n_j = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} ((\partial_n w) n_i + (\partial_s w) \tau_i) n_j \\ &= (\partial_n w) \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_j n_i + (\partial_s w) \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \tau_j n_i = (\partial_n w) (\partial_n^2 u) + (\partial_s w) (\partial_{ns} u) \\ &= (\partial_n w) (\Delta u - \partial_s^2 u) + (\partial_s w) (\partial_{ns} u). \end{aligned}$$

同理, 第二部分为:

$$\sum_{i,j=1}^2 \partial_\nu (\partial_\nu u) w n_\nu = w \sum_{i,j=1}^2 \left(n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) = w \sum_{i=1}^2 n_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta u) = w \partial_n (\Delta u).$$

$$\text{故 } N(u, w) = \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} ((\Delta u - \partial_s^2 u) (\partial_n w) + (\partial_{ns} u) (\partial_s w) - \partial_n (\Delta u) w) ds.$$

$$|N(u, w)| \leq \varepsilon^2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e |((\Delta u - \partial_s^2 u) [\partial_n w] + (\partial_{ns} u) [\partial_s w] - \partial_n (\Delta u) [w])| ds \leq A_1 + A_2 + A_3.$$

运用了定理 3.2、Cauchy-Schwarz 不等式、 W_h 的性质, 得到

$$\begin{aligned} A_1 &= \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (\Delta u - \partial_s^2 u) [\partial_n w] ds \right| \\ &\leq \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e ((\Delta u - \partial_s^2 u) - P_{l-2}^e (\Delta u - \partial_s^2 u)) ([\partial_n w] - P_{l-2}^e ([\partial_n w])) ds \right| \\ &\leq \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e ((\Delta u - \partial_s^2 u) - P_{l-2}^e (\Delta u - \partial_s^2 u)) \|_{0,e} \| [\partial_n w] - P_{l-2}^e ([\partial_n w]) \|_{0,e} \right| \lesssim h^{l-1-\frac{1}{2}} \left\| \Delta u - \partial_s^2 u \right\|_{l-1} h^{\frac{1}{2}} \left\| \partial_n w \right\|_{1,h} \lesssim h^{l-1} |u|_{l+1} |w|_{2,h}. \end{aligned}$$

由于 W_h 是 C_0 连续, 故 $\int_e [w] ds = 0, \int_e [w] q ds = 0 \quad \forall q \in P_{l-2}(e)$. 又由于 $\int_e \left[\frac{\partial w}{\partial n_e} \right] ds = 0, \forall q \in P_{l-2}(e)$, 运用分部积分, 可以得到 $\int_e [\partial_s w] ds = 0, \forall p \in P_{l-2}(e)$.

则

$$\begin{aligned} A_2 &= \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (\partial_{ns} u) [\partial_s w] ds \right| \leq \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e ((\partial_{ns} u) - P_{l-2}^e (\partial_{ns} u)) ([\partial_s w] - P_{l-2}^e ([\partial_s w])) ds \right| \\ &\leq \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e ((\partial_{ns} u) - P_{l-2}^e (\partial_{ns} u)) \|_{0,e} \| [\partial_s w] - P_{l-2}^e ([\partial_s w]) \|_{0,e} \right| \\ &\lesssim h^{l-1-\frac{1}{2}} \partial_{ns} u_{l-1} h^{\frac{1}{2}} \partial_s w_{1,h} \lesssim h^{l-1} u_{l+1} |w|_{2,h}. \end{aligned}$$

$$A_3 = \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \partial_n (\Delta u) [w] ds \right| = 0.$$

故 $N(u, w) \leq \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K ((\Delta u - \partial_s^2 u) (\partial_n w) + (\partial_{ns} u) (\partial_s w) - \partial_n (\Delta u) w) ds \lesssim h^{l-1} |w|_{2,h}$. 证毕.

引入一个椭圆投影 $P_h v \in W_h$, $v \in H^4(\Omega)$, 即

$$b_h(P_h v, \psi_h) = (\varepsilon^2 \Delta^2 v - \nabla \cdot (\phi'(u) \nabla v) + \alpha v, \psi_h), \forall \psi_h \in W_h. \quad (4.2)$$

此时定义双线性型

$$b_h(v_h, w_h) := \varepsilon^2 a_h(u_h, v_h) + d_h(u; u_h, v_h) + \alpha(u_h, v_h) = 0 \quad (4.3)$$

再引入

$$b(z, v) = (u - P_h u, w)_{1,h} + (u - P_h u, w)_{0,h} = L_h(w), \text{ 其中 } z, w \in V \quad (4.4)$$

此时定义双线性

$$b(v, w) := \varepsilon^2 a(v, w) + d(u; u, v) + \alpha(v, w) = 0, v, w \in V \quad (4.5).$$

在文献 [15] 中有下列结论成立, 对于 $z \in H^3(\Omega)$ 是 (4.4) 的解, 成立

$$z_{3,\Omega} \lesssim C_\Omega u - P_h u_{1,h}$$

引理 4.5 假设 $u \in H^4(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega)$ 是问题 (2.1) 的解, 有下式子成立

$$\|u - P_h u\|_{2,h} \lesssim h^{l-1}, \quad (4.7)$$

$$\|u - P_h u\|_{1,h} \lesssim h^l, \quad (4.8)$$

$$\|u_t - (P_h u)_t\|_{2,h} \lesssim h^{l-1}, \quad (4.9)$$

$$\|u_t - (P_h u)_t\|_{1,h} \lesssim h^l, \quad (4.10)$$

证明: (4.7) 在 [16 定理 5.7] 中已经证明.

令 $\rho = u - P_h u$, 则 $\rho_{1,h}^2 = L_h(\rho) = [L_h(\rho) - b(z, \rho)] + b(z, \rho)$.

又由于引理 4.6 知 $|b(z, \rho)| \lesssim h^l |u - P_h u|_{1,h}$, 故只用估计 $L_h(\rho) - b(z, \rho)$.

用 [15(5.6)] 知, $\varepsilon^2 (-\nabla \Delta z, \rho^*) + d(u; z, \rho^*) + \alpha(z, \rho^*) = L_h(\rho^*)$

有下式成立:

$$L_h(\rho) - b(z, \rho) = L_h(\rho - \rho^*) - \varepsilon^2 (D^2 z, D^2 \rho) + \varepsilon^2 (-\nabla \Delta z, \rho^*) + d(u; z, \rho^* - \rho) + \alpha(z, \rho^* - \rho).$$

又由于 $\varepsilon^2 (D^2 z, D^2 \rho) = -\varepsilon^2 (\nabla \Delta z, \rho) + \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K ((\Delta z - \partial_s^2 z) (\partial_n \rho) + (\partial_{ns} z) (\partial_s \rho)) ds$.

$$\begin{aligned} \text{得到 } L_h(\rho - \rho^*) + \varepsilon^2 (\nabla \Delta z, \rho - \rho^*) + d(u; z, \rho^* - \rho) + \alpha(z, \rho^* - \rho) \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K ((\Delta z - \partial_s^2 z) (\partial_n \rho) + (\partial_{ns} z) (\partial_s \rho)) ds =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5. \end{aligned}$$

运用 (4.4), Cauchy-Schwarz 不等式, (4.6), (4.7) 得到

$$\begin{aligned} I_1 \leq \nabla L_h(\rho - \rho^*) &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \rho \cdot (\rho - \rho^*) + \rho \cdot (\rho - \rho^*) dx \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\rho\|_{1,K} \|\rho - \rho^*\|_{1,K} \\ &\lesssim \|u - P_h u\|_{1,h} \|u - P_h u\|_{2,h} \lesssim h^l \|u - P_h u\|_{1,h}. \end{aligned}$$

同理得到,

$$I_2 \leq \left| \varepsilon^2 (-\nabla \Delta z, \rho - \rho^*) \right| \lesssim \|\varepsilon z\|_{3,\Omega} \|h\| \|u - P_h u\|_{2,h} \lesssim h^l \|u - P_h u\|_{1,h}.$$

$$I_3 \leq \nabla d(u; z, \rho^* - \rho) \leq |\phi'(u) \nabla z \cdot (\rho^* - \rho)| \lesssim \|\varepsilon z\|_{3,\Omega} \|h\| \|u - P_h u\|_{2,h} \lesssim h^l \|u - P_h u\|_{1,h}.$$

$$I_4 \leq |\alpha(z, \rho^* - \rho)| \leq |z(\rho^* - \rho)| \lesssim \|z\|_{3,\Omega} \|h\| \|u - P_h u\|_{2,h} \lesssim h^l \|u - P_h u\|_{1,h}.$$

I_5 由引理 4.4 的证明过程可知, $I_5 \lesssim h^l \|u - P_h u\|_{1,h}$.

故得 $u - P_h u_{1,h} \lesssim h^l$.

由 (4.3) 知, $b_h((P_h u)_t, w_h) := \varepsilon^2 a_h((P_h u)_t, w_h) + d_h(u; (P_h u)_t, w_h) + \alpha((P_h u)_t, w_h)$.

对 $d_h(u; P_h u, w_h)$ 求导带入上式, 可得

$$\begin{aligned} b_h((P_h u)_t, w_h) &= \varepsilon^2 a_h((P_h u)_t, w_h) + \frac{d}{dt} d_h(u; P_h u, w_h) \\ &\quad - (\phi''(u) u_t \pi_{\nabla}^K P_h u, \pi^K w_h) + \alpha(P_h u_t, w_h) \\ &= \frac{d}{dt} b_h(P_h u, w_h) - (\phi''(u) u_t \pi_{\nabla}^K P_h u, \pi^K w_h). \end{aligned}$$

又由公式 (4.2) 可得,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_h(P_h u, w_h) &= (\varepsilon^2 \Delta^2 u_t - \nabla \cdot (\phi''(u) u_t \nabla u + \phi'(u) \nabla u_t) + \alpha u_t, w_h) \\ &= \varepsilon^2 (\Delta^2 u_t, w_h) - (\nabla \cdot (\phi''(u) u_t \nabla u), w_h) - (\nabla \cdot (\phi'(u) \nabla u_t), w_h) + (\alpha u_t, w_h). \end{aligned}$$

利用 $N(u, w)$ 的定义, 格林公式得到:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_h(P_h u, w_h) &= \varepsilon^2 a(u, w_h) - N(u, w_h) - (\nabla \cdot (\phi''(u) u_t - u), w_h) + d_h(u; u, w_h) + (\alpha u_t, w_h) \\ &= b(u_t, w_h) - N(u_t, w_h) + (\phi''(u) u_t \nabla u, \nabla w_h). \end{aligned}$$

$$b_h((P_h u)_t, w_h) = b(u_t, w_h) - N(u_t, w_h) + (\phi''(u) u_t \nabla u, \nabla w_h) - (\phi''(u) u_t \pi_{\nabla}^K P_h u, \pi_{\nabla}^K w_h).$$

而

$$\begin{aligned} \|P_h(u_t) - (P_h u)_t\|_{2,h}^2 &\lesssim b_h(P_h(u_t) - (P_h u)_t, P_h(u_t) - (P_h u)_t) \\ &= b_h(P_h(u_t), P_h(u_t)) - (P_h u)_t, P_h(u_t) - (P_h u)_t \\ &= (\phi''(u) u_t \pi_{\nabla}^K P_h u, \pi^K(P_h(u_t) - (P_h u)_t)) - (\phi''(u) u_t \nabla u, (P_h(u_t) - (P_h u)_t)) \\ &\lesssim h^l \|P_h(u_t) - (P_h u)_t\|_{2,h}. \end{aligned}$$

故得到, $\|P_h(u_t) - (P_h u)_t\|_{2,h} \lesssim h^l$.

又有,

$$\|u_t - (P_h u)_t\|_{2,h} \leq \|u_t - P_h(u_t)\|_{2,h} + \|P_h(u_t) - (P_h u)_t\|_{2,h} \lesssim h^{l-1}.$$

由引理 4.6 知 $\left| b\left(\tilde{z}, u - P_h u\right) \right| \lesssim h^l u - P_h u_{1,h}$.

可得, $b\left(\tilde{z}, u_t - (P_h u)_t\right) = \|u_t - (P_h u)_t\|_{2,h}^2 \lesssim h^l \|u_t - (P_h u)_t\|_{2,h}$.

得到, $u_t - (P_h u)_t \lesssim h^l$.

引理 4.6 假设 $u \in H^4(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega)$ 是问题 (2.1) 的解, 对 $z \in H^3(\Omega)$, 下式成立

$$b(z, u - P_h u) \lesssim h^l u - P_h u_{1,h}.$$

引理 4.7 假设 $u \in H^4(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega)$ 是问题 (2.1) 的解, $\forall \eta_h \in W_h$, 下式成立

$$|(\phi''(u) u_t \pi_{\nabla}^K P_h u, \pi_{\nabla}^K \eta_h) - \phi''(u) u_t \nabla P_h u, \nabla \eta_h| \lesssim h^l \|\eta_h\|_{2,h}.$$

引理 4.8 假设 $\forall w_h, z_h \in W_h$, 成立 $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\partial_n z_h) w_h ds \lesssim h \|w_h\|_{1,h} \|z_h\|_{2,h}$.

证明: $\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\partial_n z_h) w_h ds \right| = \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e ([\partial_n z_h] \{w_h\} + [\partial_n z_h] \{w_h\}) ds \right| \leq B_1 + B_2$

$$B_1 = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\partial_n z_h\} [w_h] ds = 0$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e [\partial_n z_h] \{w_h\} ds \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (\{w_h\} - P_{l-2}^e \{w_h\}) ([\partial_n z_h] - P_0^e [\partial_n z_h]) ds \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left\| \{w_h\} - P_{l-2}^e \{w_h\} \right\|_{0,e} \left\| [\partial_n z_h] - P_0^e [\partial_n z_h] \right\|_{0,e} \lesssim h^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_{1,h} h^{\frac{1}{2}} |\partial_n z_h|_{1,h} \\ &\lesssim h \|w_h\|_{1,h} \|z_h\|_{2,h}. \end{aligned}$$

故成立 $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\partial_n z_h) w_h ds \lesssim h \|w_h\|_{1,h} \|z_h\|_{2,h}$

令 $u - u_h = (u - P_h u) + (P_h u - u_h)$

引理 4.9 假设 $u \in H^4(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega)$, 有下式成立

$$|d_h(\pi_0^h u_h; u_h, \theta) - d(u; P_h u, \theta)| \lesssim (\|\theta\|_{1,h} + \|\theta\|_{0,h} + \|\rho\|_{0,h} + h^l) \|\theta\|_{1,h}$$

证明:

$$|d_h(\pi_0^h u_h; u_h, \theta) - d(u; P_h u, \theta)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\phi'(\pi_0^h u_h) \pi_{\nabla}^K(u_h) - \phi'(u) \pi^K P_h u\|_{0,K} \|\pi^K \theta\|_{0,K}$$

$$\|\phi'(\pi_0^h u_h) \pi_{\nabla}^K(u_h) - \phi'(u) \pi^K P_h u\|_{0,K} \leq \|\phi'(\pi_0^h u_h) (\pi^K(u_h) - \pi^K P_h u)\|_{0,K}$$

$$+ \|\left(\phi'(\pi_0^h u_h) - \phi'(u)\right) \pi_{\nabla}^K P_h u\|_{0,K} = K_1 + K_2.$$

$$K_1 = \|\phi'(\pi_0^h u_h) \pi_{\nabla}^K(u_h - P_h u)\|_{0,K} \lesssim \|\theta\|_{1,K}.$$

$$K_2 \lesssim \|\pi_0^h u_h - u\|_{0,K} \|P_h u\|_{1,\infty,h}.$$

$$\|\pi_0^h u_h - u\|_{0,K} \leq \|\pi_0^h u_h - \pi_0^h P_h u\|_{0,K} + \|P_l^K P_h u - P_l^K u\|_{0,K} + \|P_l^K u - u\|_{0,K}$$

$$\leq \|\pi_0^h \theta\|_{0,K} + \|P_l^K \rho\|_{0,K} + \|(I - P_l^K) u\|_{0,K} \leq \|\theta\|_{0,K} + \|\rho\|_{0,K} + h^l.$$

故 $K_2 \leq \|\theta\|_{0,K} + \|\rho\|_{0,K} + h^l$,

故 $|d_h(\pi_0^h u_h; u_h, \theta) - d(u; P_h u, \theta)| \lesssim (\|\theta\|_{1,h} + \|\theta\|_{0,h} + \|\rho\|_{0,h} + h^l) \|\theta\|_{1,h}$.

定理 4.1 假设 $u \in H^4(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega)$ 是 (2.1) 的解, u_h 是 (4.4) 解, 对于 $t \in [0, T]$, 有

$\|u - u_h\|_{0,h} \leq h^l$ 成立

证明: 由 (4.1) 可知,

$$\begin{aligned} m_h(\theta_t, \chi_h) + \varepsilon^2 a_h(\theta, \chi_h) \\ &= m_h((P_h u)_t, \chi_h) + \varepsilon^2 a_h(P_h u, \chi_h) - (m_h((u_h)_t, \chi_h) + \varepsilon^2 a_h(u_h, \chi_h)) \\ &= m_h((P_h u)_t, \chi_h) + \varepsilon^2 a_h(P_h u, \chi_h) + d_h(\pi_0^h u_h; u_h, \chi_h) \end{aligned}$$

由 (4.1) 可得,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 a_h(P_h u, \chi_h) &= b_h(P_h u, \chi_h) - d_h(u; P_h u, \chi_h) - \alpha(P_h u, \chi_h) \\ &= (\varepsilon^2 \Delta^2 u - \nabla \cdot (\phi'(u) \nabla u) + \alpha u, \chi_h) - d_h(u; P_h u, \chi_h) - \alpha(P_h u, \chi_h). \end{aligned}$$

故 $m_h(\theta, \chi_h) + \varepsilon^2 a_h(\theta, \chi_h)$

$$= m_h((P_h u)_t, \chi_h) - (u_t, \chi_h) + \alpha(\rho, \chi_h) - d_h(u; P_h u, \chi_h) + d_h(\pi_0^h u_h; u_h, \chi_h).$$

根据引理 4.1 可得,

$$|m_h((P_h u)_t, \chi_h) - (u_t, \chi_h)| = \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} m_h^K((P_h u)_t, \chi_h) - (u_t, \chi_h)_K \right|$$

$$= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} m_h^K((P_h u)_t - P_l^K u_t, \chi_h) - (u_t - P_l^K u_t, \chi_h)_K + m_l^K P_l^K + (P_l^K u_t, \chi_h)_K \right|$$

$$\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\| (P_h u)_t - P_l^K u_t \|_{0,K} \|\chi_h\|_{0,K} + \|u_t - P_l^K u_t\|_{0,K} \|\chi_h\|_{0,K} \right).$$

利用引理 4.5, 定理 3.2,

可得 $m_h((P_h u)_t, \chi_h) - (u_t, \chi_h) \leq h^l \|\chi_h\|_{0,h}$.

令 $\chi_h = \theta$,

$$m_h(\theta, \theta) + \varepsilon^2 a_h(\theta, \theta)$$

$$= m_h((P_h u)_t, \theta) - (u_t, \theta) + \alpha(\rho, \theta) - d_h(u; P_h u, \theta) + d_h(\pi_0^h u_h; u_h, \theta).$$

根据上式、引理 4.9、Young 不等式可得,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\theta\|_{0,h}^2 + \varepsilon^2 \|\theta\|_{2,h}^2 &\lesssim h^l \|\theta\|_{0,h} + \alpha \|\rho\|_{0,h} \|\theta\|_{0,h} + \|\theta\|_{1,h} (\|\theta\|_{1,h} + \|\theta\|_{0,h} + \|\rho\|_{0,h} + h^l) \\ &\lesssim (h^l + \alpha \|\rho\|_{0,h}) \|\theta\|_{0,h} + \|\theta\|_{1,h} (\|\theta\|_{1,h} + \|\theta\|_{0,h} + h^l) \\ &\lesssim h^l \|\theta\|_{0,h} + (\|\theta\|_{0,h} + h^l) \|\theta\|_{1,h} \lesssim h^{2l} + \theta_{0,h}^2 + \theta_{1,h}^2. \end{aligned}$$

设 $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} |\theta_{1,h}^2| &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\theta_{1,K}^2| = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(-\int_K (\Delta \theta) \theta dx + \int_{\partial K} \theta \theta ds \right) \lesssim \gamma |\theta_{2,h}^2| + C_\gamma |\theta_{0,h}^2 + h |\theta_{1,h}| \theta_{2,h}| \\ &\lesssim \gamma |\theta_{2,h}^2| + C_\gamma \|\theta\|_{0,h}^2 + \frac{h}{2} |\theta_{1,h}^2| + \frac{h}{2} |\theta_{2,h}^2| \lesssim \left(\gamma + \frac{h}{2} \right) |\theta_{2,h}^2| + C_\gamma \|\theta\|_{0,h}^2 + \frac{h}{2} |\theta_{1,h}^2| \end{aligned}$$

假设 $\gamma + h/2 \leq \frac{1}{2} \varepsilon^2$,

$$\frac{1}{2} \|\theta\|_{0,h}^2 + \varepsilon^2 \|\theta\|_{2,h}^2 \leq h^{2l} + \|\theta\|_{0,h}^2.$$

证毕

参考文献

-
- [1] DEDNER A, HODSON A. A higher order nonconforming virtual element method for the Cahn–Hilliard equation[J]. Journal of Scientific Computing, 2024, 101: 81.
- [2] 郭靖. Cahn–Hilliard 方程的高精度快速算法及其应用研究 [D]. 华南理工大学, 2024.
- [3] Antonietti, P. F., et al., A C virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes.” SIAM Journal on Numerical Analysis, 54(1), 34–57(2016).
- [4] Deng, Q., & Wei, H., Deng, Q., & Wei, H. A C virtual element method for the Cahn–Hilliard equation on polygonal meshes. SIAM Journal on Numerical Analysis, 55(2), 547–574(2017).
- [5] Antonietti, P. F., et al. A mixed virtual element method for the Cahn–Hilliard equation. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 28(09), 1743–1785(2018).
- [6] Han, D., & Wang, X. A mixed virtual element method for the dynamical Cahn–Hilliard equation. Journal of Computational Physics, 419, 109398 (2020).
- [7] Zhang, J., & Yang, X. An adaptive virtual element method for the Cahn–Hilliard equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 367, 113101(2020).
- [8] Li, Y., Chen, L. A second-order energy stable scheme for the Cahn–Hilliard equation using the virtual element method. Applied Numerical Mathematics, 169, 265–281(2021).
- [9] Wu, S., & Li, M., A virtual element method for the coupled Cahn–Hilliard–Navier–Stokes system. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 377, 113687(2022).
- [10] Liu, H., Gao, F., A virtual element method for the anisotropic Cahn–Hilliard equation. Journal of Scientific Computing, 90(1), 13 (2022).
- [11] Wang, K., & He, X., Efficient solver and preconditioning techniques for the virtual element discretization of the Cahn–Hilliard equation. Journal of Computational Physics, 491, 112375. (2023).
- [12] Zhang, B., Zhao, J., & Chen, S. (2020). The nonconforming virtual element method for fourth-order singular perturbation problem. Advances in Computational Mathematics, 46(1), 19.
- [13] Brenner, S.C., Scott, L.R.: The mathematical theory of finite element methods. No. 15 in Texts in applied mathematics, 3rd edn. Springer, New York (2008).
- [14] Beirão da Veiga, L., Brezzi, F., Cangiani, A., Manzini, G., Marini, L.D., Russo, A.: Basic principles of virtual element methods. Math. Models Methods Appl. Sci. 23(01), 199–214 (2013).
- [15] Elliott, C.M., French, D.A.: A nonconforming finite–element method for the two–dimensional Cahn–Hilliard equation. SIAM J. Numer. Anal. 26(4), 884–903(1989).
- [16] Dedner, A., Hodson, A.: Robust nonconforming virtual element methods for general fourth–order problems with varying coefficients. IMA J. Numer. Anal. 42(2), 1364–1399 (2022).