凸函数的创新应用路径探索

伍珍香
安徽信息工程学院，安徽 芜湖 241000

DOI: 10.61369/VDE.2025090004

摘　　要： 凸函数作为数学分析领域中的核心概念之一，具有独特的性质和广泛的应用。本文主要探讨了凸函数在不同领域的应用。在优化理论中，利用凸函数的凸性可有效解决各类优化问题，极大地提升了求解效率与准确性。在计算机科学中，凸函数可用于机器学习与图像处理。在经济学领域，凸函数被用于构建经济模型，如成本函数、效用函数等。本文首先给出凸函数的定义及性质，随后介绍了凸函数的部分应用，例如：利用函数的凸性衍生推论证明不等式；凸函数在经济界限的应用。

关 键 词： 凸函数；应用；性质；不等式

Exploration of Innovative Application Paths of Convex Functions

Wu Zhenxiang
Anhui Institute of Information Technology, Wuhu, Anhui 241000

Abstract: As one of the core concepts in the field of mathematical analysis, convex functions possess unique properties and extensive applications. This paper mainly explores the applications of convex functions in different fields. In optimization theory, the convexity of convex functions can be effectively used to solve various optimization problems, which greatly improves the efficiency and accuracy of solutions. In computer science, convex functions can be applied to machine learning and image processing. In the field of economics, convex functions are used to construct economic models, such as cost functions and utility functions. This paper first presents the definition and properties of convex functions, and then introduces some of their applications, such as proving inequalities using corollaries derived from the convexity of functions, and the application of convex functions in economic boundaries.

Keywords: convex function; application; property; inequality

引言

在数学的宏大体系中，凸函数占据着极为重要的地位，它以独特的性质和广泛的应用贯穿于众多数学分支以及现实应用领域。研究凸函数的应用具有重要的理论和现实意义。从理论层面来看，深入研究凸函数的应用有助于进一步完善数学理论体系，推动数学分析、优化理论等相关学科的发展 [1]。在现实应用方面，凸函数的应用能够为解决各类实际问题提供有效的方法和策略。因此，对凸函数应用的研究具有重要的现实意义。

一、基础知识

定义 1　设函数 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上任意两点 x_1，x_2 和任意实数 λ，$\lambda\in(0,1)$，总有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，那么称 $f(x)$ 为 I 上的凸函数。若上述不等式为严格不等式时，函数 $f(x)$ 就被称为严格凸函数。

定理 2 设 $f(x)$ 为区间 I 上的二阶可导函数，则在 I 上 $f(x)$ 为凸函数 $\Leftrightarrow$ $f''(x)>0$，$x\in I$ 。

推论 3（ *Jensen* 不等式）假如 $f(t)$ 在区间 D 上呈凸性，那么对于 D 上的 t_1，$t_2,\cdots$，t_n，$n\in N$，则有 $f(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n})\le\frac{f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_n)}{n}$ 。

性质 4 若对任何两点 $a<b,a,b\in(m,M)$，函数 $f(t)$ 呈凸性，则满足不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)。$$

二、凸函数在数学领域中的应用

在数学领域，凸函数作为优化算法的核心，为梯度下降算法、牛顿法等提供了坚实的理论基础。这些基于凸函数的优化算

法能够高效地求解各种复杂的优化问题，在机器学习、深度学习等领域有着广泛的应用。

（一）不等式证明

凸函数在不等式证明领域是当之无愧的强大工具，詹森不等式、均值不等式、柯西不等式等众多经典不等式都可以借助凸函数的性质巧妙证明，为不等式的研究和应用开辟了新的思路[2]。

例 1 证明 *Cauchy—Holder* 不等式，设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为两组不小于零的实数，$m>1, n>1$，$m+n=1$，有 $\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i{}^m\right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^{p} b_i{}^n\right)^{\frac{1}{n}}$

证 $f(x)=x^m$，$f''(x)>0$，由性质可得，对任意 $x_1, x_2, \cdots x_p \in R^+$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_p \in (0,1)$，$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$，

有 $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p)^m \le (\lambda_1 x_1)^m + \cdots + (\lambda_p x_p)^m$，

令 $x_i = \frac{a_i}{b_i^{\frac{1}{m-1}}}, \lambda_i = \frac{b_i{}^n}{\sum_{i=1}^{p} b_i{}^n}$，

既有 $\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i{}^m\right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^{p} b_i{}^n\right)^{\frac{1}{n}}$，若 $m=n=2$，就是 *Cauchy—Schwartz* 不等式 $\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{p} b_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$，

类似，*Holder* 不等式变形

$\sum x_i{}^m y_i^n \le \left(\sum x_i\right)^m \left(\sum y_i\right)^n$ 成立 $(m+n=1, m, n, x, y>0)$。

（二）优化算法核心

在数学领域，凸函数作为优化算法的核心，发挥着至关重要的作用，众多经典的优化算法都基于凸函数的性质构建，为解决各种复杂的优化问题提供了有效的途径。

梯度下降算法是一种广泛应用的基于凸函数的优化算法，其基本原理是利用函数的梯度信息来迭代更新参数，以逐步逼近函数的最小值。在机器学习和深度学习中，损失函数通常被设计为凸函数，这使得梯度下降算法能够有效地找到最优解。梯度下降算法的应用场景非常广泛，常用于线性回归、神经网络等模型的训练中。在神经网络中，通过反向传播算法计算损失函数关于各个参数的梯度，然后利用梯度下降算法更新参数，使得神经网络能够学习到数据中的特征和模式，实现对数据的准确分类和预测[3]。

牛顿法是另一种基于凸函数的重要优化算法，它利用函数的二阶导数信息来加速收敛。与梯度下降算法相比，牛顿法在接近最优解时具有更快的收敛速度。牛顿法的基本思想是在当前点处使用二阶泰勒展开来近似原函数，然后通过求解近似函数的最小值来确定下一个迭代点。在实际应用中，对于一些复杂的凸函数，虽然牛顿法不能像二次凸函数那样一次迭代就找到最优解，但由于它利用了二阶导数信息，能够更准确地逼近最优解，因此在收敛速度上通常优于梯度下降算法[4]。在一些需要高精度和快速收敛的优化问题中，如大规模数据的机器学习模型训练、工程设计中的优化问题等，牛顿法常常被选用。

三、凸函数在计算机科学中的应用

（一）机器学习

在机器学习领域，凸函数扮演着基石性的角色，为众多关键算法和模型提供了理论支撑和优化方向，其中支持向量机和逻辑回归便是凸函数应用的典型代表[5]。

SVM 作为一种强大的分类和回归模型，核心思想在于寻找一个最优的分类超平面，以实现对不同类别数据的准确划分。由于凸函数的局部最优解即为全局最优解，这使得 SVM 能够通过成熟的凸优化算法，如 SMO（序列最小优化）算法等，高效地找到全局最优解，从而保证了模型的准确性和稳定性。以手写数字识别为例，将手写数字的图像转化为特征向量作为 SVM 的输入，通过求解上述凸优化问题，SVM 可以找到一个最优的分类超平面，将不同数字的图像准确分类[6]。在这个过程中，凸函数的性质使得 SVM 能够避免陷入局部最优解，提高了模型的泛化能力，使得模型在面对新的手写数字图像时也能保持较高的识别准确率。

（二）图像处理

在图像处理领域，凸函数发挥着独特而关键的作用，为图像分割、边缘检测、图像去噪等核心任务提供了创新的思路和高效的解决方案，显著提升了图像处理的质量和效率[7]。

在图像分割旨在将图像划分为多个具有特定意义的区域，以便后续的分析。基于凸函数的图像分割方法将图像分割问题巧妙地转化为凸优化问题。通过定义合适的目标函数，该函数通常基于图像的特征信息，如像素的灰度值、颜色等，利用凸函数的性质来寻找最优的分割结果。以基于水平集的图像分割方法为例，该方法将分割曲线表示为水平集函数，通过最小化一个包含图像数据项和正则化项的能量函数来演化水平集函数，从而实现图像分割[8]。这个能量函数通常是凸函数，利用凸优化算法可以有效地求解，使得分割曲线能够准确地收敛到图像中物体的边界。

边缘检测是图像处理中用于提取图像中物体边缘信息的重要技术。凸函数在边缘检测中主要通过构建基于凸函数的边缘检测模型来实现。一种常见的方法是利用图像的梯度信息，结合凸函数的性质来增强边缘信号并抑制噪声干扰。通过定义一个凸函数来衡量图像中每个像素点的边缘强度，例如基于梯度幅值和方向的函数，然后利用凸优化算法寻找边缘强度最大的点，从而确定图像的边缘。例如，在自动驾驶领域，需要对摄像头采集的图像进行边缘检测，以识别道路、车辆和行人等物体的边缘。基于凸函数的边缘检测算法能够快速准确地提取出这些物体的边缘信息，为自动驾驶系统的决策提供重要的数据支持[9]。

图像去噪是基于凸函数的特性来构建去噪模型，旨在去除图像在采集、传输和存储过程中引入的噪声，恢复图像的原始信息。一种典型的方法是基于全变分（TV）模型的图像去噪。TV 模型通过最小化图像的全变分来去除噪声，全变分是一个凸函数，它衡量了图像的梯度变化。通过求解这个凸优化问题，可以在去除噪声的同时保留图像的边缘和细节信息。例如，在卫星图像的处理中，由于卫星在拍摄过程中受到各种因素的影响，图像往往会存在噪声。基于凸函数的去噪方法能够对卫星图像进行去

噪处理，提高图像的清晰度和可读性。

四、凸函数在经济学中的作用

（一）优化决策

帮助企业实现利润最大化：在生产决策中，生产函数通常被视为凸函数。企业可以通过分析凸生产函数的性质，确定最优的生产要素投入组合，以实现产量最大化或成本最小化，进而实现利润最大化。例如，企业可以通过对劳动和资本等投入要素的调整，找到在给定成本下产出最大的组合，或者在给定产出目标下成本最小的组合。

助力消费者实现效用最大化：消费者的效用函数也常被假设为凸函数。在预算约束下，凸效用函数保证了消费者能够在不同商品之间进行权衡，找到满足自身效用最大化的消费组合。消费者会根据商品的价格和自身的收入，选择合适的商品购买量，以达到最大的满足程度[10]。

（二）分析经济现象

解释边际效用递减规律：随着消费者对某种商品消费量的增加，其从每增加一单位消费中所获得的效用增量是递减的，即总效用函数是凸函数。例如，一个人饥饿时吃第一个面包会觉得很满足，效用很高，但随着吃的面包数量增加，每多吃一个面包带来的满足感（边际效用）会逐渐减少。

体现规模报酬递增或递减：在生产过程中，规模报酬递增规律表明，当所有生产要素的投入量按相同比例增加时，产出量的增加比例大于投入量的增加比例，生产函数呈现出凸向生产轴的特征。不过，当生产达到一定规模后，也可能会出现规模报酬递减，这同样可以通过生产函数的凸性变化来分析。

描述市场供需关系：需求函数通常被假设为凸函数，反映了随着价格的上升，需求量逐渐减少的特性；供给函数也常被视为凸函数，体现了随着价格的上升，供给量逐渐增加的规律。通过对凸需求函数和凸供给函数的分析，可以研究市场均衡价格和数量的形成机制，以及市场在不同条件下的变化趋势。

五、结束语

尽管凸函数在众多领域已取得了丰硕的应用成果，但仍存在一些尚未解决的问题，这些问题为未来的研究指明了方向，展现出广阔的发展空间。在应用研究方面，凸函数在新兴技术领域的应用拓展具有巨大的潜力。随着人工智能技术的不断发展，凸函数在数学、计算机科学、经济学等多个学科中都有应用，加强不同学科之间的交叉融合，将有助于拓展凸函数的应用范围和深度。在环境科学中，利用凸函数模型分析环境数据，优化资源管理和环境保护策略，也是一个具有现实意义的研究方向。

参考文献

[1] 包琳娜，王淑红 .Hermite-Hadamard 不等式的一类推广 [J]. 内蒙古民族大学学报（自然科学版），2025，40(01)：7-16.DOI：10.14045/j.cnki.15-1220.2025.01.002.

[2] 时统业 . 关于泛函的界的一些注记 [J]. 河南财政金融学院学报（自然科学版），2024，33(04)：1-6.

[3] 时统业，曾志红，曹俊飞 . 预不变凸函数的 q-Hermite-Hadamard 型不等式和广义的 q-Iyengar 型不等式 [J]. 汕头大学学报（自然科学版），2024，39(04)：24-32.

[4] 石承飞，汪铭 . 基于均衡张量与非凸函数的高精度低秩张量恢复方法 [J]. 郑州航空工业管理学院学报，2024，42(05)：97-104+112.DOI：10.19327/j.cnki.zuaxb.1007-9734.2024.05.013.

[5] 李然，连铁艳 . 有关广义 (h，m)- 预不变凸函数的 Ostrowski 型不等式及其应用（英文）[J].Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2024，39(03)：270-287.DOI：10.13371/j.cnki.chin.q.j.m.2024.03.005.

[6] 刘朗麒，张利军 . 适应梯度变化的普适在线凸优化算法 [J]. 计算机学报，2024，47(11)：2629-2644.

[7] 王妍 . 几类 F 型凸函数及其积分不等式 [D]. 大连理工大学，2024.DOI：10.26991/d.cnki.gdllu.2024.000369.

[8] 梁清海 . 凸函数及其应用 [D]. 淮北师范大学，2024.

[9] 刘明术，方宏彬 .N 次幂下 S- 凸函数和其性质研究 [J]. 池州学院学报，2024，38(03)：6-9.DOI：10.13420/j.cnki.jczu.2024.03.002.

[10] 万莉娟，佟浩，吴葛，等 .K- 凸函数的性质 [J]. 齐齐哈尔大学学报（自然科学版），2024，40(04)：91-94.DOI：10.20171/j.cnki.23-1419/n.2024.04.009.

