薛定谔方程的虚拟元分析

刘旺
华北水利水电大学 数学与统计学院，河南 郑州 450046

摘 要： **本文旨在研究基于虚拟元方法的非线性 Schrödinger 方程 (NLSW) 的数值求解，该方程包含波动算子. 首先，利用误差分裂技术将时空误差分解为时间误差和空间误差. 其次，使用截断函数方法处理非线性项. 误差分裂技术和截断函数方法在时间上采用隐式 Crank–Nicolson 方法，在空间上采用新的隐式虚拟元方法. 最终，我们得到了 NLSW 方程的 L^2 误差估计。**

关 键 词： **虚拟元方法；误差分裂技术；截断函数方法；误差估计**

Analysis of the virtual element method for the Schrodinger Equation

Liu Wang
North China University of Water Resources and Electric Power School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou, Henan 450046

Abstract: This paper aims to study the numerical solution of nonlinear Schrodinger equation (NLSW) based on virtual element method, which includes wave operators. Firstly, using the error splitting technique decomposes the spatio–temporal errors into temporal and spatial errors. Secondly, a truncated function approach is used to deal with nonlinear terms.The error splitting technique and the truncated function method apply the implicit Crank–Nicolson method in time and the new implicit dummy element method in space.Ultimately, we obtain L^2 error estimation for the NLSW equation.

Keywords: **virtual element method; error splitting technique; truncation function method; error estimation**

一、引言

考虑以下带波动算子的非线性 Schrödinger 方程 (NLSW):

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + iu_t + \beta(x) f\left(|u|^2\right) u = 0, (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

这里 $u(x,t)$ 是未知函数，$\beta(x)$ 是实值势函数，$i=\sqrt{-1}, x=(x_1,x_2), T<\infty, \Omega \subset R^2$ 是一个矩形域，边界为 $\partial\Omega$. $u_0 =: u_0(x), u_1 =: u_1(x)$ 是光滑的复值函数 . $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是非线性的光滑函数，例如：多项式函数 $f(s)=s^q (q>0)$ ，对数函数 $f(s)=ln(1+s)$ 和有理函数 $f(s)=-\frac{4s}{1+s}$. 这些典型方程出现在等离子体物理中的 Langmuir 波包络近似、平面光弹模型等 .

方程组的解是能量守恒的，即

$$\frac{d}{dt}\int\left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \beta(x) F\left(|u|^2\right)\right) dxdy = 0, in\Omega,$$

其中，$t \geq 0$ ，$F(s)=\int_0^s f(t)dt$.

虚拟元方法是一种强大的数值工具，能够有效解决多种偏微分方程，如 Poisson 方程、Stokes 方程和 Cahn–Hilliard 方程等。文献 [1] 系统研究了虚拟元方法在特征值问题求解中的应用，文献 [2] 提出了应用虚拟元方法解决非线性抛物问题。

带波动算子的非线性薛定谔方程 (NLSW) 是偏微分方程，在一般情况下不能求出解析解，只能依靠各种各样的数值方法求其数值解 . 例如，文献 [3] 研究了守恒型有限差分方法，特别地，在文献 [4] 中采用 IEQ 方法研究了 NLSW 方程的线性隐式和局部能量守恒格式 . 本文旨在研究基于虚拟元方法的非线性 Schrödinger 方程 (NLSW) 的数值求解。

本文采用的方法具有创新性，不仅适用于当前研究，还可推广至其他非线性模型的线性化及隐式有限元误差估计 . 本文的结构安排如下：第一部分介绍了 NLSW 方程的物理背景及研究方法；第二部分阐述协调虚拟元的定义、相关公式及定理；第三部分提出离散格式，给出重要结论，并详细推导 L^2 误差估计的理论证明。

二、协调虚拟元

分解网络 $\mathfrak{B}_h$ 由最大尺寸为 h 的互不重叠的简单多面体单元（包括多边形和多面体）构成 . 我们定义 $E_h(\mathfrak{L}_h)$ 是 $\mathfrak{B}_h$ 的边 (面) 的集合，$E_h^o(\mathfrak{L}_h^o)$ 是内部边 (面) 的集合，$E_h^\partial(\mathfrak{L}_h^\partial)$ 是边界边 (面) 的集合 . 记 $P_k(X)$ 为 X 中次数不大于 k 的多项式空间，X 可以是区域或单元 K 。

为了得到最优误差估计，给出如下网格剖分：存在正常数 γ ，有以下结论成立。①对于任意元素 $K \in \mathfrak{B}_h$ 和任意边界 $e \in \partial K$ ，有 $h_e \geq \gamma h_K$ ；②$K \in \mathfrak{B}_h$ 相对于圆盘上的所有点是星形的或者是一个半径 $\geq \gamma h_K$ 的球；③在三维空间中，$e \in E_h$ 对于半径 $\geq \gamma h_e$ 的圆盘上的所有点也是星形的 .

定义：

$$M_l^e = \left\{ m; m = \left(\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_e}{h_e}\right)^b, |b| \leq l \right\}, \quad M_l^f = \left\{ m; m = \left(\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_f}{h_f}\right)^b, |b| \leq l \right\}, \quad M_l^K = \left\{ m; m = \left(\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_K}{h_K}\right)^b, |b| \leq l \right\}, \quad l \in N$$

, $M_l^{K,*}=\left\{m;m=\left(\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_K}{h_K}\right)^b,|b|=l\right\}$, $l\in N$,这里 $b=(b_1,\dots,b_d)\in N^d,|b|=\sum_{j=1}^d b_j,\boldsymbol{X}^b=\prod_{j=1}^d x_j^{b_j}$, $\boldsymbol{X}_e$ 和 $\boldsymbol{X}_K$ 分别表示 e 和 K 的中点和质心 .

对于任意的 $K\in\mathfrak{B}_h$,定义边界空间：

$$B_k(\partial K)=\left\{v\in C^0(\partial K):v|_e\in P_k(e),\forall e\subset\partial K\right\},$$

扩充的局部虚拟元空间：

$$V_k^{-K,c}=\left\{v_h\in H^1(K):\triangle v_h\in P_k(K),v_h|_{\partial K}\in B_k(\partial K)\right\}.$$

局部空间 $\tilde{V}_k^{K,c}$ 的自由度：

DOF1: v_h 在 K 上各个顶点处的值；

DOF2: $k>1$, v_h 在每条边上的 $k-2$ 阶矩，即 $\frac{1}{|e|}\int v_h m_\alpha de,ine,\forall m_\alpha\in M_{k-2}^e$ ；

DOF3: $k>1$, v_h 在 K 内的 $k-2$ 阶矩，即 $\frac{1}{|K|}\int v_h m_\alpha dK,inK,\forall m_\alpha\in M_{k-2}^K$ 以及额外的自由度： $\frac{1}{|K|}\int v_h m_\alpha dK,inK,\forall m_\alpha\in M_{k-1}^{K,*}\cup M_k^{K,*}$.

为了去除额外的自由度，需要定义一个局部虚拟元空间：

$$V_k^{K,c}=\left\{v_h\in\tilde{V}_k^{K,c}:(v_h,q)_K=\left(\Pi_k^{K,\nabla}v_h,q\right)_K,\forall q\in M_{k-1}^{K,*}\cup M_k^{K,*}\right\},$$

这里， $\Pi_k^{K,\nabla}:V_k^{K,c}\to P_k(K)$ 是一个 H^1 投影算子，满足

$$\begin{cases}a^K\left(\Pi_k^{K,\nabla}v_h,q\right)=a^K(v_h,q),\forall q\in P_k(K),a^K(v_h,q)=\int\nabla v_h\quad qdK,inK,\\ P_0\left(\Pi_k^{K,\nabla}v_h\right)=P_0(v_h),P_0(v_h)=\dfrac{1}{|\partial K|}\int v_h ds,in\partial K.\end{cases}$$

易知 $V_k^{K,c}$ 的自由度在 DOF1-DOF3 中选取 .

定义：

$$V_k^K=\{v_h\in V_{k+1}^{K,c}:\int v_h m_\alpha dK=\int\Pi_k^{K,\nabla}v_h m_\alpha dK,inK,\forall m_\alpha\in M_{k-1}^{K,*};$$
$$v_h(a)=\Pi_k^{K,\nabla}v_h(a),\forall a\in\mathfrak{F}(K)\},$$

其中， $\mathfrak{F}(K)$ 是单元 K 的顶点集 .

引理1: 由文献 [5], 对于任意的 $v_h\in V_k$ ，有 $\|v_h\|_{L^\infty}\le Ch^{-1}\|v_h\|_{L^2}$ 成立。

引理2: 由文献 [5], 有逆不等式 $\|v_h\|_{L^\infty}\le Ch^{-1}\|v_h\|_{L^2}$ 成立，结论和多项式空间中的式子一致 .

引理3: 当 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega)$ 时，有 $\|P_h u-u\|\le C_r h^{k+1}|u|_{k+1}$ 成立 .

定义 Ritz 投影算子：

$P_h:H_0^1(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega)\to V_h$ ，故有 $a_h(P_h u,v_h)=-(\triangle u,v_h),\forall v_h\in V_h$.

定义 L^2 投影算子： $\Pi_k^{K,0}:L^2(K)\to P_k(K)$ ，满足以下式子，

$\int q_k\left(v-\Pi_k^{K,0}v\right)dK=0,inK,\forall v\in L^2(K),\forall q_k\in P_k(K)$.

定义局部复虚拟元空间

$X_k^K:X_k^K=\left\{u_h+iv_h;u_h,v_h\in V_k^K\right\}$ ， X_k 是对应的整体虚拟元空间。

由文献 [5], 可得

$$\left\|\Pi_k^0 v\right\|_{L^2}\le\|v\|_{L^2},\left|\Pi_k^\nabla v\right|_{1,h}\le|v|_{1,h},\left\|\Pi_k^0 v\right\|_{L^\infty}\le C_\pi\|v\|_{L^\infty}\tag{2}$$

对于任意的 $w\in H^m(\Omega),1\le m\le k\ +1$ ，有

$$\left\|w-\Pi_k^0 w\right\|_{L^2}+h\left|w-\Pi_k^0 w\right|_{1,h}\le C_\pi h^m|w|_m\tag{3}$$

定义双线性形：对于任意的 $u,v\in X_k^K$ ，

$m_h^K(.,.):X_k^K\times X_k^K\to C$ ， $a_h^K(.,.):X_k^K\times X_k^K\to C$ ，可得

$m_h^K(v,u)=\left(\Pi_k^{K,0}v,\Pi_k^{K,0}u\right)_K+S_m^K\left(v-\Pi_k^{K,0}v,u-\Pi_k^{K,0}u\right)$ ，

$a_h^K(v,u)=\left(\Pi_k^{K,\nabla}v,\Pi_k^{K,}\ u\right)_K+S_a^K\left(v-\Pi_k^{K,}\ v,u-\Pi_k^{K,}\ u\right)$ ，

其中， $S_m^K(v,w)=\sum_{j=1}^{N_{dof}^K}h_j^2\overline{x_j(w)}x_j(v)$ ， $S_a^K(v,w)=\sum_{j=1}^{N_{dof}^K}\overline{x_j(w)}x_j(v)$ ， h_j 是每个自由度 x_j 的特征长度 .

相容性：任意的 $p_1\in P_k^K$ ，可得 $m_h^K(v_h,p_1)=(v_h,p_1)_K$ ， $a_h^K(v_h,p_1)=a^K(v_h,p_1)$ ，其中， $v_h\in X_k^K$ ；

稳定性：存在正常数 α_* ， α^* ， β_* ， β^* ，与网格尺度 h 无关，对于任意的 $v_h\in X_k^K$ ，可得

$$\beta^*\|v_h\|_{L^2(K)}^2\ge m_h^K(v_h,v_h)\ge\beta_*\|v_h\|_{L^2(K)}^2,\tag{4}$$

$$\alpha^*|v_h|_{H^1(K)}^2\ge a_h^K(v_h,v_h)\ge\alpha_*|v_h|_{H^1(K)}^2.\tag{5}$$

定义整体双线性形：

$$m_h(v_h,u_h)=\sum_{K\in\mathfrak{B}_h}m_h^K(v_h,u_h),\quad a_h(v_h,u_h)=\sum_{K\in\mathfrak{B}_h}a_h^K(v_h,u_h),$$

$$\forall v_h,u_h\in X_k$$

三、离散格式及收敛性

在方程（1）中，令

$$u_t=\phi(x,t)\in\Omega\times(0,T]\tag{6}$$

因此，方程（1）转换为以下形式：

$$\begin{cases}\phi_t-\Delta u+i\phi+\beta(x)f\left(|u|^2\right)u=0,(x.t)\in\Omega\times(0,T], & (7)\\ u_t=\phi(x,t),(x,t)\in\Omega\times(0,T], & (8)\\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], & (9)\\ u(x,0)=u_0,(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega, & (10)\end{cases}$$

其中， $\Omega\in R^2$ ，是边界为 $\partial\Omega$ 的有界域，0< $T\ <\infty$. 令 $\tau>0$ 为时间步长， $t_n=n\tau,n=0,1,\dots,M$ ，有 $t_M=T$.

定义： $\delta_{tt}\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\tau},\hat{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\varphi^{n+1}+\varphi^n}{2},D_t\hat{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\hat{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}-\hat{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau}$,

得到如下的全离散格式，即求 $\left(U_h^{m+1},\Phi_h^{m+1}\right)\in X_k\times X_k,0\le m\le M$ ，其中 $w_h\in X_k$ ，

$$m_i\left(\delta_t U^{m+\frac{1}{2}},w_h\right)-m_h\left(\hat{\Phi}_h^{m+\frac{1}{2}},w_h\right)=0,\tag{11}$$

$$m_h\left(\delta_t\Phi_h^{m+\frac{1}{2}},w_h\right)-m_h\left(\hat{\Phi}_h^{m+\frac{1}{2}},w_h\right)=+a_h\left(\hat{U}_h^{m+\frac{1}{2}},w_h\right)$$
$$=\left(-\beta(x)\frac{F\left(\left\|\Pi_k^0U_h^{m+1}\right\|^2\right)-F\left\|\Pi_k^0U_h^m\right\|^2}{\left\|\Pi_k^0U_h^{m+1}\right\|^2-\left\|\Pi_k^0U_h^m\right\|^2}\right)^2\Pi_k^0\hat{U}_h^{m+\frac{1}{2}},\Pi_k^0w_h)\tag{12}$$

初始条件 U^0 ， Φ^0 满足

$m_h\left(U_h^0,w_h\right)=(u_0,w_h)$ ， $m_h\left(\Phi_h^0,w_h\right)=(\phi_0,w_h)=(u_1,w_h)$ ， $\forall w_h\in X_k$.

假设方程组（7）-（10）的解存在且满足：

$$\|u_0\|_{H^{k+1}}+\|\phi_0\|_{H^{k+1}}+\|u\|_{L^\infty((0,T);H^{k+1})}+\|\phi\|_{L^\infty((0,T);H^{k+1})}$$
$$+\|u_t\|_{L^2((0,T);H^{k+1})}+\|\phi_t\|_{L^2((0,T);H^{k+1})}+\|u_{tt}\|_{L^2((0,T);H^2)}$$
$$+\|\phi_{tt}\|_{L^2((0,T);H^2)}+\|u_{ttt}\|_{L^2((0,T);L^2)}+\|\phi_{ttt}\|_{L^2((0,T);L^2)}\le C_r.\tag{13}$$

为了全文的理论分析，假设

$f(\cdot)\in C^3(R),0\le\beta(x)\in C^1(\Omega)$ ，易得 $|\beta(x)|\le a$ ， a 为正常数 .

定理1: 假设方程组 (7)-(10) 有唯一解 $(u,\phi)\in X\times X$ 满足 (13),NLSW 方程的全离散格式 (1)-(12) 有唯一解 $(U_h^n,\Phi_h^n)\in$ ，当 $\tau\le\tau_0^{**},h\le h_0^{**}$ 时， τ_0^{**}、 h_0^{**} 都是正常数，不依赖 τ、 $h\quad M$ ，此时，

$$\left\|u^n-U_h^n\right\|_{L^2}+\left\|\phi^n-\Phi_h^n\right\|_{L^2}\le C_0\left(\tau^2+h^{k+1}\right),1\le n\le M,\tag{14}$$

其中， $C_0>0$ 是常数，依赖 C_r ，不依赖 τ、 $h\quad M$.

为了证明定理1，需要引入 NLSW 方程的时间离散格式，

$$\begin{cases}\delta_t\Phi^{m+\frac{1}{2}}-\Delta\hat{U}^{m+\frac{1}{2}}+i\hat{\Phi}^{m+\frac{1}{2}}+\beta(x)\dfrac{F\left(\left|U^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|U^m\right|^2\right)}{\left|U^{m+1}\right|^2-\left|U^m\right|^2}\hat{U}^{m+\frac{1}{2}}=0, & (15)\\ \delta_t U^{m+\frac{1}{2}}-\hat{\Phi}^{m+\frac{1}{2}}=0, & (16)\end{cases}$$

其中， $m=0,1,\dots,M-1$, 初始条件和边界条件为

$$U^0(x)=u_0(x),\Phi^0(x)=\phi_0(x),\text{在}\Omega\text{上},$$
$$U^m(x)=\Phi^m(x)=0,\text{在}\partial\Omega\text{上}. \tag{17}$$

类似于文献 [5],全离散格式 (11)–(12) 的误差分为以下两个部分： (18)

$$\left\|u^m-U_h^m\right\|_{L^2}\le\left\|u^m-U^m\right\|_{L^2}+\left\|U^m-U_h^m\right\|_{L^2},$$
$$\left\|\phi^m-\Phi_h^m\right\|_{L^2}\le\left\|\phi^m-\Phi^m\right\|_{L^2}+\left\|\Phi^m-\Phi_h^m\right\|_{L^2}.$$

类似文献 [5] 中定理3、定理4的证明，可得 (7)–(18) 的右边第一项以 $O(\tau^2)$ 为界，第二项以 $O(h^2)$ 为界 .

下面证明定理1： 为了方便计算,定义 $E_u^n=P_hu^n-U_h^n,E_\phi^n=P_h\phi^n-\Phi_h^n$. 由 (7)–(10)，(11)–(12)，我们得到如下误差方程，

$$m_h\left(\delta_tE_u^{m+\frac12},w_h\right)+im_h\left(\widehat{E}_\phi^{m+\frac12},w_h\right)=a_h\left(\widehat{E}_u^{m+\frac12},w_h\right)=N_1^{,m+\frac12}(w_h)+Y_1^{m+\frac12}(w_h)+R_1^{m+\frac12}(w_h), \tag{19}$$

$$m_h\left(\delta_tE_u^{m+\frac12},w_h\right)-m_h\left(\hat{E}_\phi^{m+\frac12},w_h\right)=Y_2^{m+\frac12}(w_h)+R_2^{m+\frac12}(w_h), \tag{20}$$

其中，

$$N_1^{m+\frac12}(w_h)=-\beta(x)\left(\frac{F\left(\left|\Pi_k^0U_h^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|\Pi_k^0U_h^m\right|^2\right)}{\left|\Pi_k^0U_h^{m+1}\right|^2-\left|\Pi_k^0U_h^m\right|^2}\Pi_k^0\hat{U}_h^{m+\frac12},\Pi_k^0w_h\right)$$
$$+\beta(x)\left(\frac{F\left(\left|u^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|u^m\right|^2\right)}{\left|u^{m+1}\right|^2-\left|u^m\right|^2}\hat{u}^{m+\frac12},w_h\right),$$

$$R_1^{m+\frac12}(w_h)=\left(\triangle\hat{u}^{m+\frac12}-\triangle P_h\hat{u}^{m+\frac12},w_h\right)+im_h\left(P_h\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)-i\left(\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right),$$

$$R_2^{m+\frac12}(w_h)=\left(\delta_tu^{m+\frac12}-u_t^{m+\frac12},w_h\right)-\left(\hat{\phi}^{m+\frac12}-\phi^{m+\frac12},w_h\right),$$

$$Y_1^{m+\frac12}(w_h)=m_h\left(\delta_tP_h\phi^{m+\frac12},w_h\right)-\left(\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right),$$

$$Y_2^{m+\frac12}(w_h)=m_h\left(\delta_tP_hu^{m+\frac12},w_h\right)-\left(\delta_tu^{m+\frac12},w_h\right).$$

由 $Y_1^{m+\frac12}(w_h)$ 、引理3、式子（4）,有

$$\begin{aligned}
Y_1^{m+\frac12}(w_h)&=m_h\left(\delta_tP_h\phi^{m+\frac12},w_h\right)-\left(\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right)\\
&=m_h\left(\delta_tP_h\phi^{m+\frac12},-\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right)+m_h\left(\delta_t\phi^{m+\frac12}-\Pi_k^0\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right)\\
&+\left(\Pi_k^0\delta_t\phi^{m+\frac12}-\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right)\\
&\le\beta^*m_h\left(\delta_tP_h\phi^{m+\frac12},-\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right)+\beta^*\left(\delta_t\phi^{m+\frac12}-\Pi_k^0\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right)\\
&+\left(\Pi_k^0\delta_t\phi^{m+\frac12}-\delta_t\phi^{m+\frac12},w_h\right)\\
&\le Ch^{k+1}\left\|w_h\right\|_{L^{2'}}
\end{aligned} \tag{21}$$

同理可得，

$$Y_2^{m+\frac12}(w_h)\le Ch^{k+1}\left\|w_h\right\|_{L^2}, \tag{22}$$

由 $R_1^{m+\frac12}(w_h)$ 、引理3、式子（3）（4）,有

$$\begin{aligned}
R_1^{m+\frac12}(w_h)&=\left(\Delta\hat{\mathrm{u}}^{m+\frac12}-\Delta P_h\hat{u}^{m+\frac12},w_h\right)+im_h\left(P_h\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)-i\left(\hat{\phi}^{m+\frac12},w_i\right)\\
&=\left(\Delta\hat{\mathrm{u}}^{m+\frac12}-\Delta P_h\hat{u}^{m+\frac12},w_h\right)+im_h\left(P_h\hat{\phi}^{m+\frac12}-\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)\\
&+im_h\left(\hat{\phi}^{m+\frac12}-\Pi_K^0\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)+im_h\left(P_h\hat{\phi}^{m+\frac12}-\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)\\
&\le\left|\left(\Delta\hat{\mathrm{u}}^{m+\frac12}-\Delta P_h\hat{u}^{m+\frac12},w_h\right)\right|+\left|im_h\left(P_h\hat{\phi}^{m+\frac12}-\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)\right|\\
&+im_h\left(\hat{\phi}^{m+\frac12}-\Pi_K^0\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)\Big|+\Big|i\left(\Pi_K^0\hat{\phi}^{m+\frac12},-\hat{\phi}^{m+\frac12},w_h\right)\\
&\le Ch^{k+1}\left\|w_h\right\|_{L^{2*}}
\end{aligned} \tag{23}$$

由泰勒展开式、Cauchy–Schwarz不等式以及 Young不等式，有

$$\begin{aligned}
R_2^{m+\frac12}(w_h)&=\left(\delta_tu^{m+\frac12}-u_t^{m+\frac12},w_h\right)-\left(\hat{\phi}^{m+\frac12}-\phi^{m+\frac12},w_h\right)\\
&\le\left|\left(\delta_tu^{m+\frac12}-u_t^{m+\frac12},w_h\right)\right|+\left|\left(\hat{\phi}^{m+\frac12}-\phi^{m+\frac12},w_h\right)\right|\\
&\le C{w_h}_{L^2}^2+C\tau^4,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}_1^{m+\frac12}(w_i)\\
&=-\beta(x)\left(\frac{F\left(\left|\Pi_k^0U_h^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|\Pi_k^0U_h^m\right|^2\right)}{\left|\Pi_k^0U_h^{m+1}\right|^2-\left|\Pi_k^0U_h^m\right|^2}\Pi_k^0U_h^{m+\frac12},\Pi_k^0w_h\right)\\
&\quad+\beta(x)\left(\frac{F\left(\left|u^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|u^m\right|^2\right)}{\left|u^{m+1}\right|^2-\left|u^m\right|^2}\hat{u}^{m+\frac12},w_h\right)\\
&=\beta(x)\left(\frac{F\left(\left|u^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|u^m\right|^2\right)}{\left|u^{m+1}\right|^2-\left\|u^m\right\|^2}\hat{u}^{m+\frac12}-\Pi_k^0\left(\frac{F\left(\left|u^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|u^m\right|^2\right)}{\left|u^{m+1}\right|^2-\left\|u^m\right\|^2}\hat{u}^{m+\frac12}\right),w_h-\Pi_k^0w_h\right)\\
&\quad+\beta(x)\left(\frac{F\left(\left|u^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|u^m\right|^2\right)}{\left|u^{m+1}\right|^2-\left|u^m\right|^2}\hat{u}^{m+\frac12},-\left(\frac{F\left(\Pi_k^0\left|u^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\Pi_k^0\left|u^m\right|^2\right)}{\left|\Pi_k^0u^{m+1}\right|^2-\left|\Pi_k^0u^m\right|^2}\Pi_k^0\hat{u}^{m+\frac12}\right),\Pi_k^0w_{1h}\right)\\
&=n_1(w_h)+n_2(w_h).
\end{aligned} \tag{25}$$

由式子 (3)(13)、泰勒展开式以及 Cauchy–Schwarz不等式，有

$$\mathfrak{n}_1(w_h)\le Ch^{k+1}\left\|w_h\right\|_{L^{2*}} \tag{26}$$

易知，

$$\left\|U_h^n\right\|_{L^\infty}\le\left\|P_hU^n\right\|_{L^\infty}+C_{inv}h^{-\frac d2}\left\|\widetilde{E}_u^n\right\|_{uL^2}\le K_1. \tag{27}$$

由 Cauchy–Schwarz不等式、引理3、式子 (3)(13)(27),可得

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{n}_2(w_h)\\
&\le\beta(x)\left(\frac{F\left(\left|u^{m+1}\right|^2\right)-F\left(\left|u^m\right|^2\right)}{\left|u^{m+1}\right|^2-\left|u^m\right|^2}\hat{u}^{m+\frac12}-\left(\frac{F\left(\Pi_k^0\left|u^m\right|^2\right)-F\left(\Pi_k^0\left|u^m\right|^2\right)}{\left|\Pi_k^0u^{m+1}\right|^2-\left|\Pi_k^0u^m\right|^2}\Pi_k^0\hat{u}^{m+\frac12}\right),\Pi_k^0w_h\right)\\
&\le C\left(\left\|\left|u^{m+1}\right|^2-\Pi_k^0\left|u^{m+1}\right|'^2\right\|_{L^2}+\left\|\left|u^m\right|^2-\Pi_k^0\left|u^m\right|^2\right\|_{L^2}\right)\left\|w_h\right\|_{L^2}\\
&\le Ch^{k+1}\left\|w_h\right\|_{L^2}+C\left(\left\|\varepsilon_u^{m+1}\right\|_{L^2}+\left\|\varepsilon_u^{m+1}\right\|_{L^2}\right)\left\|w_h\right\|_{L^{2*}}
\end{aligned} \tag{28}$$

由式子 (25)–(28),有

$$\begin{aligned}
N_1^{m+\frac12}(w_h)&=\mathfrak{n}_1(w_h)+\mathfrak{n}_2(w_h)\\
&\le Ch^{k+1}\left\|w_h\right\|_{L^2}+C\left(\left\|\varepsilon_u^{m+1}\right\|_{L^2}+\left\|\varepsilon_u^{m+1}\right\|_{L^2}\right)\left\|w_h\right\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{29}$$

由式子 (19)(21)–(29)、Cauchy–Schwarz不等式以及 Young不等式，有

$$m_h\left(\delta_tE_\phi^{m+\frac12},w_h\right)=N_1^{m+\frac12}(w_h)+Y_1^{m+\frac12}(w_h)+R_1^{m+\frac12}(w_h)-im_h\left(\hat{E}_\phi^{m+\frac12},w_h\right)-a_h\left(\hat{E}_u^{m+\frac12},w_h\right),$$

经整理后可得，

$$\begin{aligned}
&m_i\left(\delta_tE_\phi^{m+\frac12}.w_i\right)\\
&\le\left|\mathrm{N}_1^{m+\frac12}(w_h)+\mathrm{Y}_1^{m+\frac12}(w_h)+\mathrm{R}_1^{m+\frac12}(w_h)\right|+\left|im_h\left(\widehat{E}_\phi^{m+\frac12},w_h\right)\right|+\left|a_h\left(\widehat{E}_u^{m+\frac12},w_h\right)\right|\\
&\le C\left\|w_h\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_u^m\right\|_{L^{2*}}^2
\end{aligned} \tag{30}$$

令 $w_h=\hat{E}_\phi^{m+\frac12}$,有

$$m_h\left(\delta_tE_\phi^{m+\frac12},\hat{E}_\phi^{m+\frac12}\right)\le C\left\|E_\phi^{m+1}\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_\phi^m\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_u^m\right\|_{L^2}^2. \tag{31}$$

由式子 (20)(22)(24)、Cauchy–Schwarz不等式以及 Young不等式，有

$$m_h\left(\delta_tE_u^{m+\frac12},w_h\right)\le\left|m_h\left(\hat{E}_\phi^{m+\frac12},w_h\right)+Y_2^{m+\frac12}(w_h)+R_2^{m+\frac12}(w_h)\right|. \tag{32}$$

令 $w_h=\hat{E}_u^{m+\frac12}$,有

$$m_h\left(\delta_tE_u^{m+\frac12},\hat{E}_u^{m+\frac12}\right)\le Ch^{2k+2}+C\tau^4+C\left\|E_\phi^{m+1}\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_\phi^m\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+C\left\|E_u^m\right\|_{L^2}^2. \tag{33}$$

由式子 (31)(33),整理可得

$$
\begin{aligned}
& m_h\left(E_\phi^{m+1},E_\phi^{m+1}\right)+m_h\left(E_u^{m+1},E_u^{m+1}\right)-m_h\left(E_\phi^{m},E_\phi^{m}\right)-m_h\left(E_u^{m},E_u^{m}\right)\\
&\quad \le C\tau h^{2k+2}+C\tau^5+C\tau[m_h\left(E_\phi^{m+1},E_\phi^{m+1}\right)+m_h\left(E_u^{m+1},E_u^{m+1}\right)\\
&\quad +m_h\left(E_\phi^{m},E_\phi^{m}\right)+m_h\left(E_u^{m},E_u^{m}\right)].
\end{aligned}
\tag{34}
$$

令 $\mathfrak{Q}^{m+1}=m_h\left(E_\phi^{m+1},E_\phi^{m+1}\right)+m_h\left(E_u^{m+1},E_u^{m+1}\right)$,可得

$$
\mathfrak{Q}^{m+1}-\mathfrak{Q}^{m}=C\tau h^{2k+2}+C\tau^5+C\tau\left(\mathfrak{Q}^{m+1}+\mathfrak{Q}^{m}\right). \tag{35}
$$

由式子 (35)以及离散的 Grönwall不等式,可得

$$
\mathfrak{Q}^{m+1}\le Ch^{2k+2}+C\tau^4, \tag{36}
$$

其中 $\tau\le\tau_1$,τ_1是正常数.定义 $\tau_0^{**}=min\left\{\tau_1,\tau_0^*\right\}$,由引理3、式子(4)(36),得出了定理1给出的收敛结果.

定理1只给出了 L^2 范数条件下的最优收敛结果.实际上,我们也可运用相同的方法导出 NLSW方程在H^1范数条件下的最优收敛结果。

参考文献

[1] D.Mora, G.Rivera, R.Rodr í guez: A Virtual Element Method for the Steklov EigenvalueProblem. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 25(2015)1421-1445.

[2] G.Vacca, L.Beirão da Veiga: Virtual Element Methods for Parabolic Problems on Polyg-onal Meshes. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 31(2017)2110-2134.

[3] Hu, Y.Chen, A conservative difference scheme for two-dimensional nonlinear Schröding-er equation with wave operator, Number. Methods Partial Differ. Equ. 32(3)(2015)862-876.

[4] Y.Yang, H.Li, X.Guo, A linearized energy-conservative scheme for two-dimensional no-nlinear Schrödinger equation with wave operator, Appl. Math. Comput. 404(2021)126-234.

[5] Meng Li: Cut-Off Error Splitting Technique for Conservative Nonconforming VEM forN-Coupled Nonlinear Schrödinger-Boussinesq Equations Journal of Scientific Computing,(2022)93:86.