

从对立统一的哲学角度进行线性相关的教学研究

颉永建

陕西师范大学数学与统计学院, 陕西 西安 710062

摘 要 : 线性相关与线性无关是高等代数中最为基础的概念, 二者既相互对立又紧密统一, 蕴含着深刻的哲学内涵。在教学过程中, 引入对立统一的哲学视角, 有助于学生从更高层次理解线性相关与线性无关的本质。通过分析二者的对立统一关系, 能够激发学生的学习兴趣, 培养其辩证思维能力。使学生不再局限于对概念的机械记忆, 而是深入把握知识间的内在联系, 从而更高效地掌握高等代数的相关知识, 提升解决复杂数学问题的能力, 为后续在数学及其他相关学科领域的学习与研究奠定坚实基础。

关 键 词 : 线性相关; 线性无关; 对立统一

Research on Linear Dependent Teaching from the Philosophical Perspective of Oppositional Unity

Xie Yongjian

School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062

Abstract : Linear dependence and linear independence are the most fundamental concepts in higher algebra, which are both contradictory and closely unified, containing profound philosophical connotations. Introducing a philosophical perspective of the unity of opposites in the teaching process helps students to understand the essence of linear dependence and linear independence at a higher level. By analyzing the dialectical unity relationship between the two, it can stimulate students' interest in learning and cultivate their dialectical thinking ability. Enable students to no longer be limited to mechanical memorization of concepts, but to deeply grasp the inherent connections between knowledge, thereby more efficiently mastering the relevant knowledge of advanced algebra, enhancing their ability to solve complex mathematical problems, and laying a solid foundation for subsequent learning and research in mathematics and other related disciplines.

Keywords : linear dependence; linear independence; unity of opposites

引言

(一) 研究背景与重要性

高等代数作为数学课程体系的关键组成部分, 在众多学科领域有着广泛应用^[1-4]。线性相关与线性无关是高等代数和线性代数的核心概念, 其理解程度直接影响学生对后续向量空间、线性变换、线性方程组求解等内容的掌握。然而, 这两个概念高度抽象, 学生往往难以把握其本质, 传统教学方法在帮助学生透彻理解二者关系上存在一定局限。从对立统一的哲学角度切入进行教学研究, 为打破这一教学困境提供了新的思路, 有助于学生从更高层次构建知识体系, 提升思维能力。

(二) 国内外研究现状

国内相关研究多集中于线性代数概念的常规教学方法改进, 如借助案例、多媒体等手段辅助教学, 取得的显著的成效, 在哲学与线性代数教学结合方面的系统性研究也有许多^[5-15]。已有研究虽认识到哲学思想对数学学习的潜在价值, 但缺乏深入的实践探索与教学效果评估。本文尝试从对立统一的角度对线性相关与线性无关的概念教学做一研究, 试图让学生能深入理解这两个概念的本质, 进而提升教学效果。

(三) 研究方法与创新之处

本研究运用采用案例分析法, 构建丰富教学案例阐释线性相关与线性无关的对立统一关系; 运用对比研究, 对比传统教学与融入哲学思想教学的效果。创新点在于深入挖掘线性相关与线性无关概念中的对立统一内涵, 以此为基础系统设计教学策略, 并通过教学实践验证其有效性, 为高等代数教学改革提供新的理论与实践依据。

一、线性相关与线性无关的理论基础

（一）线性相关的内涵与判定

向量组的线性相关是指对于给定数域上的向量组，若在给定数域上存在一组不全为零的数，使得其线性组合为零向量，则称该向量组线性相关。可参见教材^[1-4]

从线性方程组角度看，这等价于对应的齐次线性方程组有非零解。例如，对于向量组 $(1,1,0)$ ， $(2,2,0)$ ，设 $k_1(1,1,0) + k_2(2,2,0) = (0,0,0)$ ，即 $k_1(1,1,0) + k_2(2,2,0) = (k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, 0) = (0,0,0)$ ，可得到方程组 $k_1 + 2k_2 = 0, k_1 + 2k_2 = 0$ ，该方程组有无数组非零解（如 $k_1 = 2, k_2 = -1$ ），所以向量组 $(1,1,0)$ ， $(2,2,0)$ 线性相关。判定时，可通过计算向量组构成矩阵的秩，若秩小于向量个数，则向量组线性相关。

（二）线性无关的内涵与判定

线性无关与线性相关相对，向量组的线性无关性是指对于给定数域上的向量组，若该向量组的线性组合是零向量时只有当组合系数全为零时，才成立，则该向量组称为线性无关的。

从线性方程组角度看，这等价于对应的齐次线性方程组只有零解。例如向量组 $(1,0,0)$ ， $(0,1,0)$ ， $(0,0,1)$ ，设 $k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$ ，即 $(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$ ，只能推出 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ，所以该向量组线性无关。

（三）二者关系的深度解析

线性相关与线性无关相互依存，它们共同刻画了向量组的线性性质。没有线性相关的概念，就无法凸显线性无关的独立性特征；反之，没有线性无关作为参照，线性相关所蕴含的向量间依赖关系也无从体现。在一定条件下，二者可相互转化。例如，对于线性无关向量组 $(1,0)$ ， $(0,1)$ ，若添加向量 $(1,1)$ ，则新向量组 $(1,0)$ ， $(0,1)$ ， $(1,1)$ 线性相关，因为 $(1,0) + (0,1) - (1,1) = (0,0)$ 。反之，对于线性相关向量组，去除能由其他向量线性表示的向量，可使其变为线性无关。

二、对立统一哲学视角下的概念解读

（一）对立统一哲学的基本原理

对立统一规律是唯物辩证法的实质与核心。矛盾双方既相互对立，又相互统一。对立性表现为矛盾双方性质、特征等方面的差异与排斥；统一性体现在双方相互依存、相互贯通，并在一定条件下相互转化。这一规律广泛存在于自然界、人类社会和思维领域，为理解复杂事物的内在联系提供了有力的哲学工具。

（二）线性相关与线性无关中的对立表现

从定义上看，线性相关要求存在不全为零的系数使线性组合为零向量，而线性无关则强调只有系数全为零才满足线性组合为零向量，二者在条件设定上完全相反。在性质方面，线性相关向量组中存在向量可由其余向量线性表示，向量间存在冗余信息；

线性无关向量组中任何向量都无法由其他向量线性表示，具有更强的独立性。判定结果上，一个向量组要么线性相关，要么线性无关，二者非此即彼，呈现明显的对立态势。

（三）线性相关与线性无关中的统一体现

在高等代数知识体系中，线性相关与线性无关共同构成对向量组线性性质的完整描述，缺一不可。它们相互依存，共同服务于对向量组结构和性质的研究。在实际应用中，通过对向量组的调整，如添加或删除向量、改变向量维度等操作，可实现线性相关与线性无关状态的转化，体现了二者在一定条件下的相互贯通与转化。这种统一关系有助于学生从整体上把握向量组的性质变化规律。

三、基于对立统一的教学策略设计

（一）教学目标的重新定位

知识与技能目标上，学生应深刻理解线性相关与线性无关的概念、判定方法及其相互关系，能熟练运用相关知识解决向量组线性性质判断等问题。过程与方法目标方面，通过对立统一哲学思想引导，培养学生辩证思维能力，使其学会从矛盾的角度分析数学概念，提升逻辑推理和解决问题能力。情感态度与价值观目标是激发学生对线性代数的学习兴趣，体会数学与哲学的内在联系，增强学生对知识的探索欲望和创新意识。

（二）教学内容的优化整合

在教学内容组织上，以对立统一为主线串联线性相关与线性无关的知识点。引入概念时，通过对比二者定义，突出矛盾对立点；讲解性质和判定方法时，结合具体案例分析其相互依存关系；在应用部分，设计案例展示二者相互转化过程。同时，适时融入哲学思考引导，如在分析向量组线性性质变化时，引导学生从矛盾转化角度思考，加深对知识的理解深度。

（三）教学方法的创新应用

采用问题驱动教学法，提出如“线性相关与线性无关在定义上的本质区别是什么？”“如何从对立统一角度理解向量组添加向量后线性性质的变化？”等问题，激发学生主动思考。组织小组讨论，让学生围绕给定向量组案例，探讨其线性相关与线性无关的特征及相互关系，促进学生思维碰撞。运用案例教学法，精心构建实际生活或科研中的案例，如在图像处理中向量组表示图像特征的线性相关性分析，使学生在具体情境中体会对立统一关系在数学应用中的体现。

四、结论与展望

（一）研究总结

本研究从对立统一哲学角度深入剖析线性相关与线性无关的概念，设计并实施了基于此的教学策略。通过教学实践验证，该

方法能显著提高学生对相关知识的理解和掌握程度，有效培养学生辩证思维能力，提升学习兴趣和学习态度。研究成果为线性代数教学改革提供了新的路径和方法，丰富了数学教育与哲学融合的研究内容。

(二) 展望

未来研究将进一步挖掘高等代数其他知识点与哲学思想的联系，提高学生学习兴趣构建更完善的哲学融入高等代数课堂教学体系，不断提高教学效果。

参考文献

[1] 北京大学数学系前代数小组编, 王萼芳、石生明修订, 《高等代数》, 第5版, 高等教育出版社.

[2] 丘维声, 《高等代数(上下册)》, 第3版, 高等教育出版社.

[3] 张禾瑞、郝鈞新编, 《高等代数》(第四版), 高等教育出版社.

[4] 陈小山, 彭小飞, 黎稳.(2024). 高等代数. 高等教育出版社.

[5] 王艳. 线性相关性定理在高等代数中的应用探究 [J]. 数学学习与研究, 2021(24): 146-147.

[6] 李继成. 矩阵的初等变换在线性代数中的应用文献综述 [J]. 数学学习与研究, 2019(12): 146-147.

[7] 王发兴; 郑莹. 浅谈线性代数微课设计——以向量组的最大无关组与秩为例 [J]. 大学数学, 2020(02): 81-85.

[8] 冯爱芳; 刘祖华. 关于高等代数中线性变换的两点思考 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2013(12): 204-207.

[9] 喻厚义; 王正攀. 线性空间直和分解定理的两个证明 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2015(04): 6-8.

[10] 徐运阁;; 章超; 廖军. 高等代数 [M]. 科学出版社, 2021.

[11] 欧阳毅; 张神星. 善用初等变换展开线性代数理论教学 [J]. 大学数学, 2023(05): 72-79.

[12] 王丽莎; 陈媛; 徐运阁. 线性代数中的线性方程组方法 [J]. 高等数学研究, 2024(01): 66-69+88.

[13] 刘春林; 李宝娣. 线性代数的模块化教学研究 [J]. 高等数学研究, 2023(04): 80-84.

[14] 徐运阁; 曾祥勇. 关于线性子空间与仿射子空间的注记 [J]. 大学数学, 2018(04): 72-76.

[15] 周小辉; 王刚. 在应用型人才培养下线性代数的教学研究——以计算机专业为例 [J]. 高等数学研究, 2021(04): 125-128.