矩阵对策的教学设计

白雪洁
河北农业大学理学院，河北 保定 071001

摘　　要： 对策论是现代数学的一个新分支，也是运筹学的一个模块。本文探索矩阵对策的教学设计，重点讨论两人有限零和博弈在纯策略和混合策略下的数学模型和求解方法，并将博弈论与数学规划作对比，以便快速理解矩阵对策的基本概念，总结矩阵对策的求解流程。进一步，将对策论处理多决策方优化的思想推广，与数学规划的表示形式结合构成双层规划，探讨其在应急物资配送问题中的应用，以促进学生对博弈论知识的理解和应用。

关 键 词： 博弈论；两人有限博弈；纯策略；混合策略；双层规划

Teaching Design of Matrix Countermeasures

Bai Xuejie
College of Science, Hebei Agricultural University, Baoding, Hebei 071001

Abstract: Countermeasures theory is a new branch of modern mathematics, and also a module of operations research. This paper explores the teaching design of matrix countermeasures, focusing on the mathematical model and solution method of two-person finite zero-sum game under pure strategy and mixed strategy, and compares the game theory with mathematical programming, so as to quickly understand the basic concepts of matrix countermeasures and summarize the solution process of matrix countermeasures. Further, the countermeasure theory promotes the idea of multiple decision-making party optimization, combines with the representation form of mathematical planning to form a bi-level programming, and discusses its application in the problem of distribution of emergency materials, so as to promote students' understanding and application of game theory knowledge.

Keywords: game theory; two-person finite game; pure strategy; mixed strategy; bi-level programming

前言

人类生活中经常遇到具有竞争性质的现象，在竞争过程中各方为了达到自己的目标和利益，必须考虑对手的各种可能的行动方案，以选取对自己最为有利的方案，这就是对策问题。对策论，也称为博弈论，是研究对策的理论与方法，是运筹学的一个重要分支，也是现代数学的一个重要学科[1]。马满好和刘进[2]将博弈论在运筹学中的位置提升到与数学规划并列的层次，数学规划解决单方决策的优化问题，而博弈论处理多方决策的优化问题。魏欣等人[3]提出在讲解理论之前推介由博弈论大师纳什的人生经历改编的电影名作《美丽心灵》，引导学生在面对困难时不退缩，有积极向上的人生观。李卫丽等人[4]对博弈论教学中引入军事案例进行了实践和探索。许多经济管理、工程等实际问题都可以通过借助博弈论来研究。赵敬华和兰婷[5]采用 BOPPPS教学法探讨管理博弈的授课途径。李昌文等人[6]基于 OBE理念对博弈论的目标、内容、方法和评价进行了教学实践。彭拯和曾玉华[7]挖掘了博弈论蕴含的平等与诚信、公平与正义等思政内容。我校2021年人才培养方案修订，运筹学课程内容调整，除线性规划、对偶理论和整数规划外，增加博弈论章节。这部分内容在运筹学教材[8]中主要介绍矩阵对策，讨论两人有限零和对策在纯策略和混合策略下的数学模型及求解方法。

本文结合笔者的教学实践，通过3个经典案例引入对策论的3个基本要素，采用与数学规划对比的方法介绍两人有限零和博弈在纯策略和混合策略意义下的数学模型、均衡解和对策值。在求解方法上，重点分析混合策略下博弈模型的图解法与线性规划法，给出矩阵博弈的求解流程。在知识应用上，将博弈论处理多方竞争下决策的建模思路应用于应急物资配送中的救援方与受灾方的层次关系上，用数学规划法建立双层模型，使得博弈论与线性规划相互交融，实现知识创新，培养学生解决复杂科学问题及适应实际应用场景的能力。

一、博弈论的教学设计

（一）引例及三要素

现实决策中，普遍存在着带有对抗性、斗争性或竞争性的现象，如下棋、打牌、比赛，乃至政治、经济和军事等，通常称为对策问题，研究对策问题的理论统称为对策论，或博弈论。结合要讨论的内容，选择市场竞争、齐王－田忌赛马和囚徒困境3个典型应用作为引例，前两个分别对应两人有限零和博弈在纯策略和混合策略下的情况，最后一个对应两人有限非零和博弈。在此基础上给出博弈论的三个基本要素：局中人、策略和赢得矩阵，3个引例的赢得矩阵见图1。

基金项目：河北农业大学线上线下混合式一流课程运筹学；河北农业大学课程思政优质课运筹学；河北省高校创新创业教育教学改革研究与实践项目：基于运筹学专创融合教学改革的课程延展教育研究（2023cxcy051）；教育部产学合作协同育人项目（231001913012308、231002070015217、231106627203620）。
作者简介：白雪洁（1981－），女，河北武安人，博士，副教授，硕士生导师，研究方向：最优化理论与应用。

$$\begin{array}{cccccc} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \min \\ \alpha_1 & 10 & -1 & 3 & -1 \\ \alpha_2 & 12 & 10 & -5 & -5 \\ \alpha_3 & 6 & 8 & 5 & 5^* \\ \max & 12 & 10 & 5^* & \end{array}$$

(a) 市场竞争问题

$$\begin{array}{cccccccc} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \min\limits_j \\ \alpha_1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \alpha_2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \alpha_3 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \alpha_4 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ \alpha_5 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ \alpha_6 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ \max\limits_i & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \end{array}$$

(b) 齐王-田忌赛马问题

$$\begin{array}{ccc} & \beta_1 & \beta_2 \\ & \text{承认} & \text{不承认} \\ \alpha_1\ \text{承认} & (-7,-7) & (0,-9) \\ \alpha_2\ \text{不承认} & (-9,0) & (-1,-1) \end{array}$$

(c) 囚徒困境

> 图1 赢得矩阵

（二）两人有限零和博弈

1.纯策略下的矩阵博弈

分析市场竞争案例的赢得矩阵（图1(a)）可知，局中人Ⅰ的最大赢得是12，选择策略 α_2。假定局中人Ⅱ是理智的，他考虑到了局中人Ⅰ要出 α_2 的心理，便打算出策略 β_3 对付，使得局中人Ⅰ得不到12反而支付5。局中人Ⅰ当然也会想到局中人Ⅱ的这一心理，故想出 α_3 来对付，使得局中人Ⅱ得不到5反而支付5。所以如果双方都不想冒险，都不存在侥幸心理，而是考虑到对方必然会设法使自己的赢得最少，就应该从各自可能出现的最不利情形中选择一种最有利的情形作为决策的依据。局中人Ⅰ的纯策略 α_1，α_2，α_3 可能带来的最少赢得分别是 -1，-5，5，最有利的情形是赢得5，所以局中人Ⅰ选择纯策略 α_3。无论局中人Ⅱ选择什么样的纯策略，都可以保证自己的赢得不会少于5。同理局中人Ⅱ选择纯策略 β_3。无论局中人Ⅰ选择什么样的纯策略，都可以保证自己的支付不会多于5。局中人Ⅰ按照最大最小原则，局中人Ⅱ按照最小最大原则，选取各自的纯策略，这对双方来说，都是一种最为稳妥的行为。

结合市场竞争案例的分析，总结出两人有限零和博弈的数学模型和均衡局势的概念，详见表1的第3列。

2.混合策略下的矩阵博弈

分析齐王-田忌赛马案例的赢得矩阵（图1(b)）可知，局中人Ⅰ齐王按照最大最小原则的赢得值 $\upsilon_1=\max\limits_i \min\limits_j A=-1s$，局中人Ⅱ田忌按照最小最大原则的支付值 $\upsilon_2=\min\limits_j \max\limits_i A=3\neq\upsilon_1 S$，不存在纯策略意义下的均衡局势。下面考虑局中人选取不同策略的概率分布。假设局中人Ⅰ的赢得矩阵为 A，选择策略 α_i 的概率为 x_i，局中人Ⅱ选择策略 β_j 的概率为 y_j。由于局中人Ⅱ以一定的概率选择自己的策略，局中人Ⅰ选择策略 α_i 的期望赢得 $E(i, y)$。同理局中人Ⅱ选择策略 β_j 的期望赢得 $E(x, j)$，计算式见图2。

$$\begin{array}{cccccccc} & & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n & \\ & & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \\ \alpha_1 & x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}y_j \triangleq E(1,y) \\ \alpha_2 & x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}y_j \triangleq E(2,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_m & x_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}y_j \triangleq E(m,y) \\ & & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i1}x_i \triangleq E(x,1) & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i2}x_i \triangleq E(x,2) & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{in}x_i \triangleq E(x,n) & \end{array}$$

> 图2 局中人不同策略下的期望赢得 $E(i, y)$ 及期望支付 $E(x, j)$

根据图2，可知局中人Ⅰ的期望赢得函数为

$$\begin{aligned} & x_1E(1,y)+x_2E(2,y)+\cdots+x_mE(m,y) \\ &=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_m)\begin{pmatrix} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\ldots+a_{mn}y_n \end{pmatrix} \\ &=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=x^TAy\triangleq E(x,y). \end{aligned} \tag{1}$$

结合两人有限零和博弈在纯策略下的讨论，总结出混合策略下的数学模型和均衡局势的概念，详见表1的第4列。

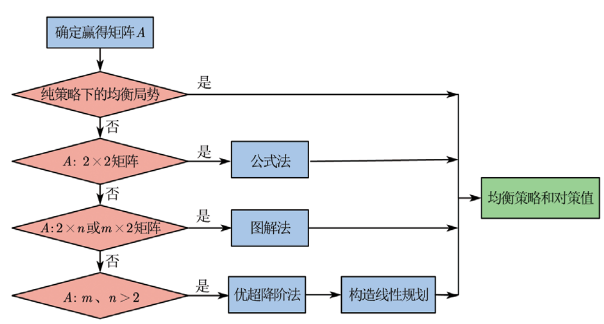
表1 博弈论与数学规划的基本概念对比

类型	数学规划	博弈论	
		纯策略	混合策略
数学模型	$\begin{cases} \max\ \ z=f(X) \\ s.t.\ \ g(X)\leqslant 0 \\ \quad X\in D \end{cases}$	$G=\{I,I;\ S_1,S_2;\ A\}$	$G=\{\mathrm{I},\mathrm{II};\ S_1^*,S_2^*;\ E(x,y)=x^TAy\}$
优化方向	max	$\begin{cases} 局中人\mathrm{I}:\max\limits_i\min\limits_j A \\ 局中人\mathrm{II}:\min\limits_j\max\limits_i A \end{cases}s$	$\begin{cases} 局中人\mathrm{I}:\max\limits_x\min\limits_y E(x,y) \\ 局中人\mathrm{II}:\min\limits_y\max\limits_x E(x,ys) \end{cases}$
解	X^*	均衡局势 $(\alpha_{i^*},\ \beta_{j^*})$	混合局势 $(x^*,\ y^*)$
值	$f(X^*)$	$V_G=a_{i^*j^*}$	$V_G=E(x^*,\ y^*)=(x^*)^TAy*$
求解方法	小规模：单纯形法 大规模：商用软件	矩阵法	2×2公式法；2×n或m×2图解法；优超降阶法；线性规划法

混合策略下矩阵博弈的求解是关键所在，以图解法和线性规划法为例说明。图解法的适用条件是局中人Ⅰ的赢得矩阵满足2行多列或者2列多行。当 A 是 $2\times m$ 矩阵时，图解法的第一步是确定局中人Ⅰ的混合策略分布值，包括：①画图；②按照最大最小原则确定 V_G 所在；③通过解方程组求出 x^*。第二步是确定局中人Ⅱ的混合策略分布值，包括：①根据性质6满足 $E(x^*,j)>V_G$ 的 y_i 取值为0；②通过解方程组确定 y^*。

对局中人Ⅰ的赢得矩阵A，经过优超降阶法后，如果行数与列数还大于2，可以用线性规划法确定混合策略的分布值。步骤如下：①根据教材定理4的不等式组，结合局中人Ⅰ和Ⅱ的决策原则，得到一对线性规划 (I) 和 (II)。②通过变量替换 $X=\dfrac{x}{\upsilon}$，$Y=\dfrac{y}{\upsilon}s$，整合规划 (I) 和 (II) 的第2组约束与目标函数，得到互为对偶的一对规划 (P) 和 (D)。③用单纯形法求解规划 (D) 得到最优值 ω^* 和最优解 X^*，结合松弛变量的检验数得到规划 (P) 的最优解 Y^*。④借助变量回代，确定原矩阵对策的值为 $V_G=\dfrac{1}{\omega^*}S$，混合策略 $x^*=V_G X^*$，$y^*=V_G Y^*$。

综合纯策略和混合策略下的博弈模型，给定局中人的赢得矩阵后，获取最优策略和博弈值的流程见图5。



> 图3 矩阵博弈求解流程

（三）其他类型的博弈论简介

两人有限零和博弈是博弈论中研究最成熟的类型，除此外还有其他类型模型。结合引例，重点介绍囚徒困境问题，用双矩阵方式分析，并基于此扩展到许多经济问题以及社会问题，如双寡头垄断、价格战、“一带一路”双赢对策等[9-10]。

二、教学案例—应急物资配送问题

博弈论与之前学习的线性规划、整数规划、图与网络模型最大的区别是决策方数量，从一个决策方扩展到多方决策，在处理实际优化问题中发挥重要作用。由于处理问题思路变化，在最初学习博弈论时不易抓住要点，结合表1的第1列，将数学规划与博弈论作对比，可以看到两者的区别与联系。理解博弈论两个决策方的互动关系后，可以将博弈论中静态博弈、动态博弈与数学规划相结合，一定程度上丰富了解决问题的视角与思路。这里借鉴动态博弈两个决策方的主从决策关系为基础，与数学规划的量化形式结合，建立双层规划模型，进一步给出其在应急物资配送问题[11-13]上的应用。

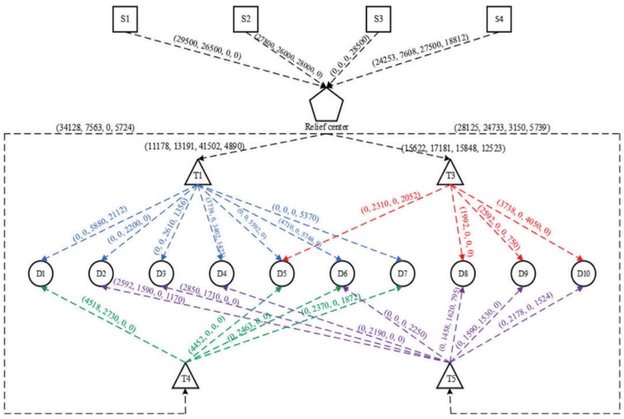
救援方与受灾方是应急物资配送问题的两个决策方，两者具有上下层次关系，建立双层规划模型[14]，其中上层模型为：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \rho^{\alpha}_{\mathrm{CVaR}}[SC+PC+IC+TC+EC]\\
&\max \sum_{j}\sum_{l}\sum_{c}\sum_{t}\frac{XM_{jlct}}{D_{lct}t_{jlct}}\\
&s.t.\ \sum_{j} XM_{jlct}\geq \eta\cdot D_{lct},\quad \forall l,c,t\\
&\qquad \sum_{m} XH_{mjct}+CX_{jc(t-1)}=\sum_{l} XM_{jlct}+CX_{jct},\quad \forall j,c,t\\
&\qquad \sum_{j} XM_{jlct}+UD_{lct}=D_{lct},\quad \forall l,c,t\\
&\qquad \sum_{c}\sum_{m} XH_{mjct}+\sum_{c} CX_{jc(t-1)}\leq Scap_{jt}Loc_{j},\quad \forall j,t\\
&\qquad \sum_{j} Loc_{j}\leq TD_{max},\\
&\qquad XM_{jlct}\leq M{*}Loc_{j},\quad \forall j,l,c,t\\
&\qquad Loc_{j}\in\{0,1\},\ XH_{mjct},XM_{jlct},CX_{mct},CX_{jct},UD_{lct}\geq 0,\quad \forall j,m,c,t,
\end{aligned}
$$

下层模型为：

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i}\sum_{m}\sum_{c}\sum_{t} XS_{imct}R_{ic}\\
&s.t.\ \sum_{i} XS_{imct}+CX_{mc(t-1)}=\sum_{j} XH_{mjct}+CX_{mct},\quad \forall m,c,t\\
&\qquad \sum_{m} XS_{imct}\leq C_{ict},\quad \forall i,c,t\\
&\qquad \sum_{c}\sum_{i} XS_{imct}+\sum_{c} CX_{mc(t-1)}-\sum_{j}\sum_{c} XH_{mjct}\leq Cap_{mt},\quad \forall m,t\\
&\qquad XS_{imct}\geq 0,\quad \forall i,m,c,t.
\end{aligned}
$$

上层救援方考虑最小化不满意率、碳排放量和运输费用，下层受灾方最大化应急物资效用。通过对偶理论写出下层规划的对偶模型，根据互为对偶的一对规划满足互补松紧性，将下层规划用其约束条件、对偶模型的约束条件和互补松紧性条件代替，转化双层模型为单层模型。进一步基于加权和整理为单目标模型，确定出应急网络中的最优配送策略如图4所示。



> 图4 双层应急物资配置策略

三、总结

本文从典型引例、基本理论、综合应用系统给出对策论一章的教学设计。从与数学规划作概念对比，两人有限零和对策在混合策略下的线性规划求解，拓展博弈论在多决策方优化上的优势建立双层模型，并探讨其在应急物资配送上的应用，完善了博弈论知识的理论框架，实现了与数学规划的融会贯通。博弈论反向又丰富了数学规划的领域，双层规划在处理多方决策的问题中有重要价值。将来可以进一步探究双层规划在其他实际问题中应用，以及在不确定信息下的如何做决策，开展跨学科的学习与研究以适应新质生产力发展需求[15]。

参考文献

[1]韩柏棠. 管理运筹学（第五版）[M]. 高教出版社，2020.

[2]马满好，刘进. 运筹学类课程教学中的课程思政研究[J]. 高教学刊，2020,(35):176-179.

[3]魏欣，马良，张惠珍，刘勇. 融入人文素养教育的"运筹学"（通识课程）教学研究[J]. 2021,43(3):286-289,293.

[4]李卫丽，李京蓓，刘进，陈杰，牛彩云.《博弈论》课程中的军事案例教学研究[J]. 产业与科技论坛，2023,22(21):171-173.

[5]赵敬华，兰婷. 基于BOPPPS混合教学模式的课程思政建设路径探究与实践[J]. 上海理工大学学报（社会科学版），2024,doi:10.13256/j.cnki.jusst.sse.230315117.

[6]李昌文，潘亚丽，任行伟. OBE理念下"博弈论"课程教学改革探索[J]. 广西科技师范学院学报，2023,38(4):109-116.

[7]彭拯，曾玉华. 课程思政视阈下博弈论模型的价值意蕴及其教学应用[J]. 大学数学，2023,39(2):37-42.

[8]运筹学教材编写组. 运筹学(本科版，第5版)[M]. 清华大学出版社，2022.

[9]肖勇波. 运筹学：原理、工具及应用[M]. 机械工业出版社，2023.

[10]谢识予. 经济博弈论[M]. 复旦大学出版社，2017.

[11]张玲，王晶，王钧. 不确定需求下应急资源配置的鲁棒优化方法[J]. 系统科学与数学，2010,30(10):1283-1292.

[12]白雪洁. 模糊环境下应急物资预置的优化方法[J]. 系统工程理论与实践，2015,35(6):1465-1473.

[13]Cao Cejun，Liu Yang，Tang Ou，Gao Xuehong. A fuzzy bi-level optimization model for multi-period post-disaster relief distribution in sustainable humanitarian supply chains. International Journal of Production Economics，2021,235:108081.

[14]Liang Siqi，Bai Xuejie，Li Yongli，Xin Hening. Model and solution of sustainable bi-level emergency commodity allocation based on type-2 fuzzy theory. Socio-Economic Planning Sciences，2023,90:101749.

[15]夏红. 新质生产力背景下图论课程教学改革探析[J]. 高教论坛，2024,8:53-56.