构建“手拉手”全等模型探究三角形问题的本质

冯美

北京作业帮线上学科培训学校，北京 100080

摘 要： 本文旨在深入探讨“手拉手”全等模型在三角形问题中的应用，通过构建普通的等腰三角形、特殊的等腰直角三角形以及特殊的等边三角形手拉手模型，详细分析并总结各类模型的构造方法及所得结论。研究发现，这些模型不仅揭示了三角形全等的本质特征，还提供了解决复杂三角形问题的新思路。通过对比分析，本文进一步阐明了“手拉手”全等模型在几何学中的重要意义，为三角形问题的研究与教学提供了新的视角。

关 键 词： 手拉手全等模型；等腰三角形；等腰直角三角形；等边三角形；三角形全等

Constructing "hand in hand" congruent model to explore the essence of triangle problem

Feng Mei

Beijing Homework Help Online Discipline Training School, Beijing 100080

Abstract: This paper aims to deeply explore the application of "hand-in-hand" isosceles model in the triangle problem, through the construction of ordinary isosceles triangle, special isosceles right triangle and special isosceles triangle hand-in-hand model, analyze and summarize the construction methods and conclusions of various models in detail. It is found that these models not only reveal the essential characteristics of triangle congruence, but also provide a new way to solve complex triangle problems. Through comparative analysis, this paper further elucidates the significance of "hand in hand" congruent model in geometry, which provides a new perspective for the research and teaching of triangle problems.

Keywords: **hand-in-hand congruent model; isosceles triangle; isosceles right triangle; equilateral triangle; triangular congruence**

引言

在几何学的浩瀚领域中，三角形问题始终占据着举足轻重的地位。全等三角形，作为几何学大厦的基石，其性质和判定方法历来是教学与实践中的核心焦点。然而，面对错综复杂的三角形问题，传统解题方法有时显得捉襟见肘，难以直击问题本质[1]。在此背景下，探索新颖、高效的解题思路显得尤为重要。“手拉手”全等模型应运而生，它巧妙地通过连接两个相似或全等的三角形，充分利用它们的内在性质，为三角形问题的求解开辟了一条崭新路径[2]。本文将深入剖析这一模型在三角形问题中的应用，揭示其背后隐藏的本质规律。

一、普通的等腰三角形手拉手模型

（一）模型构造

在几何画板的精心布局下，我们构造出了两个等腰三角形ABD与ACE，它们不仅形似，更在边长上保持着严格的等价关系——AB与AC等长，AD与AE亦不遑多让。尤为关键的是，∠BAD与∠CAE的巧妙设定，使得这两个角度相等，为后续的全等判定铺设了稳固的基石。这一构造，成就了一个既对称又富有规律性的等腰三角形手拉手模型，为深入的分析和结论提供了直观的几何支撑[3-4]。在此模型中，等腰三角形的性质得到了淋漓尽致的展现：底边BD与CE因全等关系而等长；同时，∠BAD与∠CAE的相等性，结合等腰三角形的底角相等特性，共同推导

作者简介：冯美（1993.09-），汉族，河北省邢台市人，研究生（硕士），专业：材料工程，研究方向：大招法教学，职称：初中老师，单位：北京作业帮线上学科培训学校。

出了第三边直线夹角∠BOC与线段夹角∠BAC、∠DAF的相等关系，这一结论深刻体现了三角形内角和的精髓，也为后续角度关系的探索提供了有力依据。

（二）模型结论

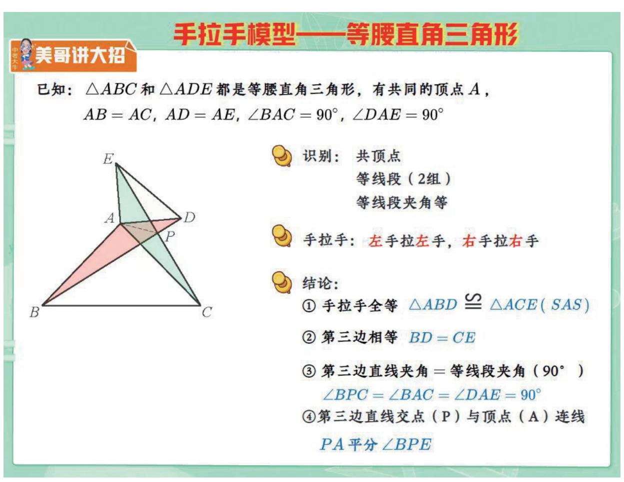
基于前述的等腰三角形手拉手模型构造，我们对其几何性质进行了深入的剖析，并成功得出了一系列重要结论。其中，最为核心的是ΔABD与ΔACE的全等关系，这一结论是严格依据SAS（边－角－边）全等判定定理推导而出的。由于AB与AC等长，AD与AE亦相等，加之∠BAD与∠CAE的精确相等，使得这两个三角形完美地满足了SAS全等的所有条件，从而确立了它们的全等关系[5-6]。

进一步地，我们由三角形的全等关系直接推导出，第三边BD与CE必然等长，这是全等三角形对应边相等的直接体现。同时，我们还发现了第三边直线夹角与线段夹角（或补角）之间的精妙联系，即∠BOC与∠BAC、∠DAF均相等。这一结论不仅深刻揭示了三角形内角和的内在规律，也为角度关系的分析提供了新的视角。

第三边直线交点O与顶点A的连线OA，平分了∠BOE。这一发现不仅充分展现了等腰三角形的对称性美，也为角度的平分现象提供了直观的几何解释[7]。通过这一模型的深入探究，我们对等腰三角形的性质及其在全等问题中的应用有了更加深刻的理解。

二、特殊的等腰直角三角形手拉手模型

（一）模型构造



在探索等腰直角三角形手拉手模型的奥秘时，我们在几何画板上精心构造了两个等腰直角三角形ABD与ACE。这两个三角形不仅完备地拥有了等腰直角三角形的所有典型性质，如两直角边长度相等、两个锐角均精确为45度，而且它们的对应边AB与AC、AD与AE也被巧妙地设定为等长，展现出一种严谨的对应关系[8]。尤为特殊的是，∠BAD与∠CAE均被精确设定为90°，这一设定使得两个三角形在形状和大小上均呈现出一种完美的对称性[3]。通过这样的精妙构造，我们获得了一个蕴含特殊性质的等腰直角三角形手拉手模型，它不仅生动展现了等腰直角三角形的独特魅力，更为后续的全等判定以及角度关系的深入分析提供了坚实而有力的几何支撑[9]。

（二）模型结论

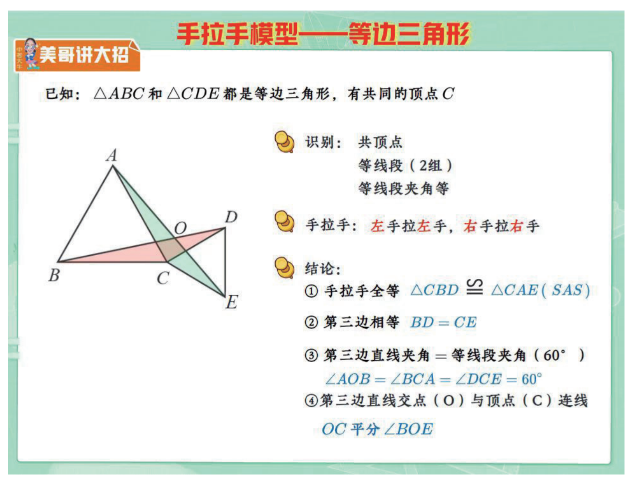
在深入探究等腰直角三角形手拉手模型后，得出了以下重要结论：等腰直角三角形ABD与ACE全等，即ΔABD≌ΔACE。这一结论是基于SAS（边－角－边）全等判定定理的特例推导而出，其中两边AB与AC、AD与AE长度相等，且夹角∠BAD与∠CAE均为90°，完全符合SAS全等的条件。

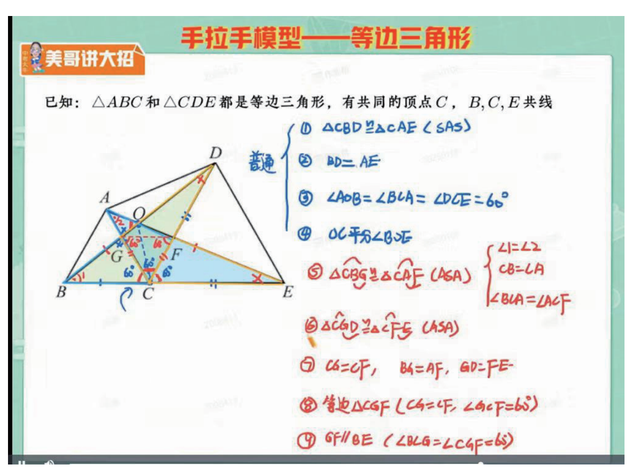
由三角形的全等关系，可以直接推导出第三边BD与CE长度相等。同时，第三边直线夹角∠BPC与线段夹角∠BAC、∠DAE均相等，且都为90°，这一特殊的角度关系揭示了等腰直角三角形中的独特性质。

此外，第三边直线交点P与顶点A的连线PA，被证明平分∠BPE。这一结论不仅彰显了等腰直角三角形的对称性特征，还为角度的平分现象提供了直观的几何解释[10]。通过这一模型的构建与分析，对等腰直角三角形的性质有了更为深刻的理解，同时也看到了其在全等问题中的广泛应用，为解决相关几何问题提供了新的思路和方法。

三、特殊的等边三角形手拉手模型

（一）模型构造





在探究等边三角形手拉手模型的过程中，选取了两个形状完

全相同且大小相等的等边三角形CBD和CAE作为研究对象[11]。其中，BC与CD、CA与CE分别相等，且∠BCD与∠CAE均被设定为60°，这一特定的角度设置赋予了模型在旋转和对称方面的独特性质。通过此番精心构造，获得了一个具有高度对称性和规律性的等边三角形手拉手模型。该模型不仅全面展现了等边三角形的所有典型性质，如三边长度相等、三个内角均为60°等，而且为后续的全等判定以及角度关系的深入分析提供了坚实而有力的几何支撑，为探索等边三角形的更多奥秘奠定了坚实的基础[12-13]。

（二）模型结论

在对等边三角形手拉手模型进行深入剖析之后，得出了以下具有重要意义的结论：等边三角形CBD与CAE全等，即ΔCBD≌ΔCAE。这一结论是基于SAS（边-角-边）全等判定定理而得出的，其中BC与CD、CA与CE分别相等，且∠BCD与∠CAE均为60°，完全满足了SAS全等的条件。

由三角形的全等关系，可以直接推导出第三边BD与CE长度相等。同时，第三边直线夹角∠AOB与线段夹角∠BCA、∠DCE均相等，且都为60°，这一结论揭示了等边三角形中角度关系的规律性，体现了等边三角形内角和的特殊性质。

此外，第三边直线交点O与顶点C的连线OC，被证明平分∠BOE。这一结论不仅充分展现了等边三角形的对称性特征，还为角度的平分现象提供了直观的几何解释，进一步加深了对于等边三角形性质的理解[14]。通过这一模型的构建与分析，等边三角形的性质及其在全等问题中的应用得到了更为深刻的阐述，为相关几何问题的解决提供了新的思路和方法。

四、总结

本文通过构建普通的等腰三角形、特殊的等腰直角三角形以及特殊的等边三角形手拉手模型，详细分析了各类模型的构造方法及所得结论。研究发现，“手拉手”全等模型不仅揭示了三角形全等的本质特征，还提供了解决复杂三角形问题的新思路。通过对比分析不同类型的三角形模型，我们进一步阐明了“手拉手”全等模型在几何学中的重要意义。这一模型不仅为三角形问题的研究与教学提供了新的视角，也为几何学的发展注入了新的活力。

参考文献

[1]范长玉. 有关“手拉手”全等模型的解读与应用［J］. 语数外学习（初中版），2024,(09):21-22.

[2]蒋亚芳. 初中数学高效课堂的构建策略——以“手拉手”全等为例［J］. 理科爱好者，2024,(03):111-113.

[3]王娇，张灿. 数学建模：理论与实践——以“手拉手模型之全等三角形”的教学设计为例［J］. 数学之友，2024,(03):49-51.

[4]张鼎. 利用“手拉手”模型解全等三角形问题［J］. 现代中学生（初中版），2023,(24):21-22.

[5]叶丹艳. 全等三角形中的“手拉手”模型［J］. 初中生辅导，2023,(Z4):130-134.

[6]张媛. 全等三角形中“手拉手”模型的探究［J］. 数理天地（初中版），2023,(07):10-11.

[7]顾辰妍. 基于“手拉手”模型构造“旋转”相似三角形［J］. 现代中学生（初中版），2023,(02):7-8.

[8]王锋. 全等模型手拉手拓展相似再探究［J］. 初中生必读，2022,(05):34-35.

[9]郑培珺. 初中数学课堂分层教学案例研究——以“全等三角形手拉手模型专题课”为例［J］. 数学之友，2022,36(05):44-47+51.

[10]马亮，陈锐波. 一题一课探究本质——以“全等三角形手拉手模型”教学设计为例［J］. 上海中学数学，2021,(10):5-7+15.

[11]李永树. “手拉手”全等模型的拓展及应用［J］. 数理化学习（初中版），2021,(05):14-17.

[12]马亮. 一题一课探究本质——以“全等三角形手拉手模型”教学设计为例［J］. 中小学数学（初中版），2021,(03):46-49.

[13]叶婷婷. 经典几何模型——浅析手拉手模型的归纳与应用［J］. 考试周刊，2020,(10):83-84.

[14]赵小花，胡永强. 构建“手拉手”模型探究问题的本质——以一节“全等三角形”复习课为例［J］. 上海中学数学，2019,(Z1):92-95.