关注一题多解　提高课堂效率

陈圣文
福建师范大学附属中学，福建 福州 350007

摘　　要： 尊重每个孩子，尊重个性思维，尊重不同思想碰撞，从不同角度看问题，是今后学习发展趋势，而对于初中数学学习而言，融合数学思想，研究解题方法解题方法的掌握与否直接关系到学生解题能力的发展，所以教师要关注“一题多解”的教学，多从学生理解认知角度入手，再从解题方法的内涵思想入手进行解析，让学生回顾总结、整理归纳梳理知识关系，达成关系性或结构性理解，形成知识体系，发展数学能力，提高学生学习数学的兴趣与自信心。

关 键 词： 一题多解；初中数学；教学研究

Focus on Multiple Solutions to one Problem to Improve Classroom Efficiency

Chen Shengwen
Affiliated High School of Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350007

Abstract： Respecting every child, respecting individual thinking, respecting the collision of different ideas, and looking at problems from different perspectives are the future trends of learning and development. For middle school mathematics learning, integrating mathematical thinking, researching problem-solving methods, and mastering problem-solving methods are directly related to the development of students' problem-solving abilities. Therefore, teachers should pay attention to the teaching of "one problem, multiple solutions", start from the perspective of students' understanding and cognition, and then analyze the connotation and ideas of problem-solving methods, allowing students to review, summarize, organize and sort out knowledge relationships, achieve relational or structural understanding, form a knowledge system, develop mathematical abilities, and improve students' interest and confidence in learning mathematics.

Keywords： **multiple solutions to one problem; middle school mathematics; teaching research**

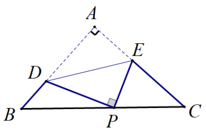
引言

初中数学教学过程中，往往通过习题来检验所学知识是否掌握，而有些教师就容易陷入题海，不断在课堂上呈现各种不同试题，让学生多做多练达到熟能生巧水平，而这正是我们要避开的应试教育，所以对于课堂例题选用或者习题选择上面，我们要更注重与学生思维层次的交流，所以一题多解就容易达成这方面的效果，让学生联系解题方法进行分析，找出方法中隐含的解题理念。

一、一题多解促思维发散

“一题多解”的研究，带领学生思考解题的多种方法，再通过习题变形设计的研究，来设计变式问题，以此推动学生的解题思考，发展学生的解题能力[4]。

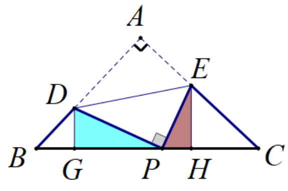
（一）问题引入：如图，在等腰 $\mathrm{R}t\Delta ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，点 D、点 E 分别在 AB、AC 上，将 ΔADE 沿 DE 翻折，点 A 恰好落在 BD 上的点 P 处，求证：$\dfrac{PD}{PE}=\dfrac{PB}{PC}$。



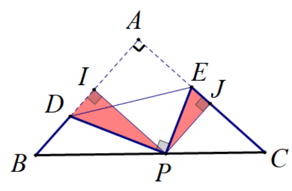
（二）选题分析：此题背景简单明了，因此切入点比较多，可以最大程度激发学生们的思考动力，调动学生的未知欲和分享欲，使学生获取更多学习的成就感觉，从而在解决问题的过程中促进学生能力的发展。

解题分析①：如果从翻折 $\angle P=\angle A=90^\circ$ 为切入点，不难让人联想到是否可以构造“一线三等角”，如图1，可得 $\Delta DGP\backsim\Delta PHE$，所以 $\dfrac{PD}{PE}=\dfrac{PG}{EH}=\dfrac{DG}{PH}=k$，又由于等腰 $\mathrm{R}t\Delta ABC$，所以可得等腰 $\mathrm{R}t\Delta DGB$ 等腰 $\mathrm{R}t\Delta EHC$，所以 $PB=PG+DG=kEH+kPH$，$PC=PH+EH$，

所以 $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{kEH+kPH}{EH+PH}=k=\dfrac{PD}{PE}$。

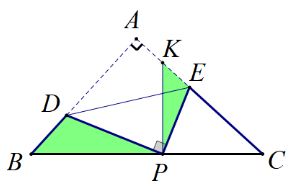


>图1

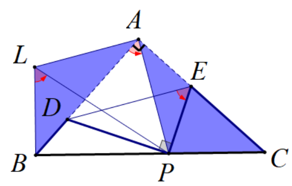


>图2

解题分析②：如果从四边形 ADPE对角互补的角度来分析，又容易想到过一点作两邻边的垂线，如图2，可得 $\Delta PID \backsim \Delta PJE$，那么 $\frac{PD}{PE}=\frac{PI}{PJ}$，又由于 $PI=\frac{\sqrt{2}}{2}PB$，$PJ=\frac{\sqrt{2}}{2}PC$ 所以 $\frac{PD}{PE}=\frac{PB}{PC}$。



>图3



>图4

解题分析③：如果从已知 ΔPBD 来看，它有一 $45°$ 角，如图3，所以还可以过点P作 $PK\perp BC$ 交 AC 于点K，则容易发得 $\Delta PBD \backsim \Delta PKE$，所以 $\frac{PD}{PE}=\frac{PB}{PK}=\frac{PB}{PC}$。

解题分析④：如果从已知 ΔABC 是等腰三角形来看，满足有“共顶点、边相等”，也可以尝试利用旋转的知识来解决，如图4，将 ΔABC 绕点A顺时针旋转90度，则PC=LB，且 ，所以 $\frac{PB}{PC}=\frac{PB}{BL}=\tan\angle BLP$，那接下来可以利用角的转化即可，利用对角互补，易得A、L、B、P四点共圆，且A、D、P、E四点共圆，直接 $\angle BLP=\angle PAP=\angle DEP$，所以 $\tan\angle BLP=\tan\angle DEP=\frac{PD}{PE}$，所以 $\frac{PD}{PE}=\frac{PB}{PC}$。

（三）解题反思：几何图形的变换，对学生来讲永远是探索求新的过程，也是训练学生思维、发展学生思维的过程，从不同角度切入，有利于培养学生推理能力、创造性思维能力[13]。几何问题的切入点，也是数学知识整体框架的入门点，教师如果能从整体视角对复习课例题进行设计，通过规划教学环节、创设教学活动，以知识点、面扩展开来，结合已有知识储备，展开适当的联想，让学生将零散的知识联系起来，不断重组、构建更为完善的知识体系，改善解题思路，培养学生的发散性思维和创新思维。

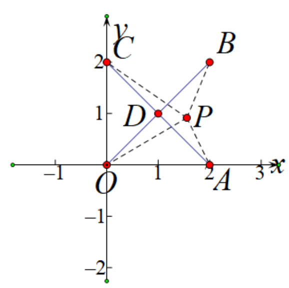
二、一题多解重数形结合

都说教师下海，学生上岸，对于那么多的习题，学生如何在有效的复习时间达最大效果，就要注重学生对知识的理解，而不仅仅是会解题，有些题目呈现代数形式，但在初中阶段不太好实现解题往往就还有别的解题切入点。

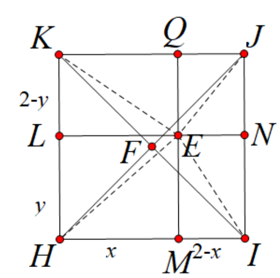
（一）问题引入：已知 $0<x<2$，$0<y<2$，求 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(2-y)^2}+\sqrt{(2-x)^2+y^2}+\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}$ 的最小值[12]。

（二）选题分析：这题一眼看去代数式求最值，初中阶段代数式求最值往往与函数或者不等式有关，而对于上述问题，从函数或不等式，对于初中生来讲却很难解决，就必须要我们有更广阔的思维方式。看到二次根式首先可以想到它的定义和相关性质，所指一个非负数的算数平方根，也可以试着从几何角度描述就是指面积为被开方数的正方形边长，如果被开方里面是两项平方和或差，这又可以往勾股定理方面考虑，它可能是直角三角形的边，故二次根式也可以理解成线段的长。此题困难之处被开方数又含参数，所以就要上升成二维平面含参这不就是平面直角坐标系吗[14]？所以此题建系肯定是一种不错的解决问题策略。

1.解题分析①：如果构建平面直角坐标系，易知 $\sqrt{x^2+y^2}$，$\sqrt{x^2+(2-y)^2}$，$\sqrt{(2-x)^2+y^2}$，$\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}$ 可分别表示点（x,y）到（0，0），（0.2）（2，0）的距离，如图5：



>图5



>图6

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(2-y)^2}+\sqrt{(2-x)^2+y^2}+\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}$$
$$=PO+PC+PA+PB\geq OB+AC=4\sqrt{2}$$

以上当且仅当点 P 与 AC 与 OB 交点 D 重合时等号成立。

2.解题分析②：如果不建系，也比较容易发现 :x与$2-x$的和是定值，y与$2-y$的和也是定值，故可以构造如图6所示的矩形，其长为 $x+(2-x)=2$，宽为 $y+(2-y)=2$，于是

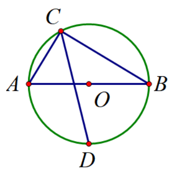
$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(2-y)^2}+\sqrt{(2-x)^2+y^2}+\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}$$
$$=EH+EK+EI+EJ\geq HJ+KI=4\sqrt{2}$$

以上当且仅当点 E 与对角线 KI 与 HJ 的交 F 重合时等号成立。

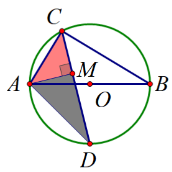
三、一题多解促深挖教材例题

一题多解能够让能让学生有更广阔的思维表达空间，也能让学生从不同角度全面地反映对数学知识的思考、理解和掌握情况，直观地反映学生的知识储备和解题能力[9]。而教材是师生学习知识的重要工具，教材里的例题更是各种延伸题型的基础，为了更好地将一题多解的教学环节引入课堂教学中，教师也要加大对教材的钻研力度，加深对教材的理解程度，结合学情，合理的改编拓展例题，达到多题一解或一题多解的目的，引导学生多角度分析、思考、联想多个知识点，提升逻辑推理能力，打破常规教学模型和僵化的解题思路，最终提练出知识的内存联系，总结归纳，提升教师的教学能力和学生的思维解题能力．例如九上圆

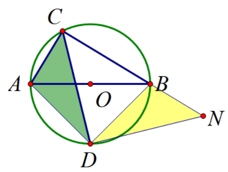
周角定理一节中的例题[5]：如图7，$\odot O$的直径AB为10cm，弦AC为6cm，$\angle ACB$的平分线交$\odot O$于点D，求BC、BD、AD的长[15]。



> 图7



> 图8



> 图9

分析：此题主要是课本新知识的应用，如直径所对圆周角为直角，同弧所对圆周角相等，所以每个知识点都可以推导出与所求结果相关的信息，完成解答．如果仅完成此例题，未免有些可惜，那么是否可以一题多变，多些追问[6]：例如求CD的长．法1，如图8可以由$\angle ACD$是45°入手，过点A作AM垂直CD于点M，可得等腰RTΔACM和RTΔADM，即可通过AC求出CM，AM，再求出DM，即可求出CD.法2可以发现等腰三角形ADB，构造共顶点的等腰三角形CDN，这样就产生常见手拉手模型，实现两三角形全等，即可推出$CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CN$.当然，以上的追问只是对此题的延伸拓展，或许和本节知识关系不大，但对于思维发散而言，它确定很能打开学生的思维广度，促进学生更深入的思考。

四、一题多解助教学反学

“一题多解”对学生个人来说至关重要，它将数学理论、数学步骤、思维模式和发散能力集于一体，促进学生全面系统地掌握知识，形成完整的数学理论架构[1]。解题方法的掌握与否直接关系到学生解题能力的发展，教师要关注“一题多解”的教学，从解题方法的内涵思想入手进行解析，让学生联系解题方法进行分析，找出方法中隐含的解题理念[7]。在实际教学中，“一题多解”的研究需要教师为学生创建相应空间，帮助学生探寻解答题目的多种解法．在实际教学中，教师要从学生的发展出发选择适于学生进行多解探究的例题，并结合问题的解法分析进行多方面展示[10]。通过上述不等式的解决过程，让学生认识到解决问题不只一种方法可行，而是可以从多角度、多方面入手，综合函数思想、数形结合思想、极限思想等，从而得出多种解题思路和方法，促进学生全面地掌握数学知识。这就要求教师注重对“一题多解”的深入研究，让学生对初中数学产生浓厚的兴趣，推动教学改革获得更大的发展[2]。在实际教学中，“一题多解”的研究需要教师为学生创建相应空间，帮助学生探寻解答题目的多种解法[8]。在实际教学中，教师要从学生的发展出发选择适于学生进行多解探究的例题，并结合问题的解法分析进行多方面展示[11]。通过一题多解的教学能够使得教师对于教材的理解更加的深入，同时也使得教师对于教学目标的把握更加的确切．在备课的过程中，教师对于一题多解的思考也有利于课堂教学活动的进行．通过在各个教育环节对于一题多解的推进，也有利于教师自己的专业成长[3]。

参考文献

[1] 李士锜．PME：数学教育心理 [M]. 上海，华东师范大学出版社，2001.

[2] 王茁力 . 初中数学“一题多解”的教学价值 [J]. 中学数学教学参考 ,2018,(Z3):99-100.

[3] 陈俊吉．一题多解激发学生的创造性思维——以一道几何压轴题为例 [J]. 初中数学教与学 2023（24）:29-31.

[4] 杨孝斌，吕传汉，吴万辉，等．高中数学 "一题一课多解变式 "教学模式的理论构建与实践探索 [J]. 中小学课堂教学研究， 2021.

[5] 徐瑾劼．学业成就动机在促进学生发展中的量与度——基于 PISA2018 中国四省市学生的实证分析 [J]. 中国教育学刊， 2020(1):6.

[6] 吴荣燕．"正弦定理 "新授课的教学设计 [J]. 高中数学教与学， 2020(8):20-23.

[7] 欧阳熙琴．怎样帮助学生掌握数学解题的思想方法 [J]. 语数外学习：语文教育， 2017(5):53-53.

[8] 郑寒御．数学习题课的一种教学模式探讨——"小题大做 "[J]. 基础教育论坛 : 综合版， 2011, 000(007):42,45.

[9] 崔淑娟，王丽艳．初中生数学逻辑思维能力的培养 [J]. 成功密码 : 综合版， 2021(4):1.

[10] 吴静．一题多解 提升数学创新思维能力——以 "立体几何二面角的多种解法 "为例 [J]. 中学数学 : 高中版， 2022(9):59-60.

[11] 黄国超．横看成岭侧成峰——对一竞赛试题多种解法的赏析 [J]. 物理通报， 2016(3):3.

[12] 邹生书，江保兵．三点控制法求一类函数的最大值中的最小值问题 [J]. 数学通讯：学生阅读， 2019, 000(006):P.14-14.

[13] 宋慧，顾晓东．循序而进，发展学生几何思维水平——以《角的初步认识》教学为例 [J]. 小学教学设计：数学．科学版， 2019(4):3.

[14] 王兵．如何学好 "二次根式 "[J]. 中学生数理化 : 教与学， 2011, 000(010):89.

[15] 张盈．"圆 "的变式教学一例 [J]. 湖南教育 : 下旬，2012(8):57-57.