把数学的发展逻辑融入到中小学数学的教材和教学——以数集及其运算的教学为例

杨世显

长江师范学院数学与统计学院，重庆 408100

摘　　要： 数学的理论大厦建立的基础是逻辑，这个逻辑主要是历史逻辑或者发展逻辑，正如《道德经》中的名句“一生二，二生三，三生万物”，人类对数学最初的认识，按照某种逻辑，“长”出新的理论和知识。义务教育阶段的数学教育，可能考虑到学生的理解和推理能力的局限，大部分理论是以展示的方式呈现，而学生的学习目标定位在“认知”，这就丢失了数学的发展逻辑，也抹杀了数学在学生头脑中“成长”的可能，本文以数集及其运算的教学分析如何将数学的逻辑融入教学，同时对数学教材的某些概念的叙述提出了个人的建议。

关 键 词： 数学发展逻辑；中小学；数学教学；数学教材；数系；运算

The Development Logic of Mathematics is Integrated into the Teaching Materials and Teaching of Mathematics in Primary and Secondary Schools -- Take the Teaching of Number Sets and Their Operations as an Example

Yang Shixian

School of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Chongqing 408100

Abstract: The foundation of the theoretical building of mathematics is logic, which is mainly historical logic or developmental logic. As the famous line in the Tao Te Ching goes, "One life gives birth to two, two gives birth to three, and three gives birth to all things." Humans' initial understanding of mathematics, according to a certain logic, "grew" new theories and knowledge. Mathematics education in compulsory education may take into account the limitations of students' understanding and reasoning abilities. Most theories are presented in the form of demonstrations, and students' learning goals are positioned as "cognition", which loses the development logic of mathematics and eliminates the possibility of mathematics "growing" in students' minds. This article analyzes how to integrate the logic of mathematics into teaching through the teaching of sets of numbers and their operations, and provides personal suggestions for the description of certain concepts in mathematics textbooks.

Keywords: mathematics development logic; primary and secondary schools; mathematics teaching; mathematics textbooks; mathematics department; operation

本人从事大学数学教学18年，在教学过程中，围绕教学目标和教学效果，不断的进行课程内容、教学方法和手段的改革，在改革过程中，发现了一些中小学数学教学与大学数学教学的连贯性上的缺失，本文就数学的运算构造方面的问题对中小学数学的教学进行分析。

以数的学习为例，小学生从自然数开始学习，逐步加入加减法和乘法运算，到小学高年级开始认识小数和分数，同时介绍它们的运算。从内容看，目前小学教材的体现的是“认识”的目标，这个逻辑顺序是没有问题的，但是失去了很多数本身的逻辑，例如，没有分清分数和小数的产生逻辑，分数应该是整数除法的产物，而小数是位值计数的产物。这从小学生的认知能力角度，应该是比较合理的，但是对学生数学思维能力的培养和学习动力的累积有比较明显的缺失。

在教学中体现数学的逻辑，是数学教学的最高要求，在自然数的加法的教学中，已经体现了逻辑性，从10以内的加法，到20以内的加法，再到100以内的加法，就是从个位的单数位相加到个位和十位的双数位对应相加，教学中能够强化这种逻辑的诠释，引导学生理解，就可以举一反三，认知1000以内的加法，乃至10000以内的加法，甚至小数的加法。在学习数字和数字运算的过程中，除法应该是相对困难的一环，但也是数系扩张的基础之一，能在教学中引导学生从“恰好均分”到“不能均分”而有余，再从“不能均分”到通过均分单位“1”而又“完成均分”，这个过程使得以“1”为单位的整数集合已经不够用了，那就需要有新的数产生，这种数就是分数，也就是说，分数的产生从数字逻辑的层面看就是为了解决整数除法的余数问题。学生初步认识分数以后，教师可以引导学生发现一些分数运算的整数理解，比如分数的乘法和除法就和整数的乘除法有完美的对照：

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}\Leftrightarrow(a\div b)\times(c\div d)=a\div b\times c\div d=$$
$$a\times c\div b\div d=(a\times c)\div(b\times d)$$
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}\Leftrightarrow(a\div b)\div(c\div d)=a\div b\div c\times d=$$
$$a\times d\div b\div c=(a\times d)\div(b\times c)$$

这样教学会让学生对运算有统一思维，而不会是整数运算是整数运算，分数运算是分数运算。另外，与整数运算不同，分数的加减法相对于乘除法而言是“难点”，因为分数没有像整数那样有“最小单位”1，只要在加减法中找到“临时最小单位”就能够像整数加减法一样运算，例如分数 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{1}{6}$，根据分数均分理解，分别表达单位1均分5份和6份中的一份，我们需要找到一个更小的能同时表达这两个部分的均分单元，这明显和最小公倍数一致的，即将单位1分成既能被5整除的份数，也能被6整除的份数，这就是均分为30份，即目前的最小单位为 $\frac{1}{30}$，这样就把 $\frac{1}{5}$ 写成 $\frac{6}{30}=6\times\frac{1}{30}$，$\frac{1}{6}=\frac{5}{30}=5\times\frac{1}{30}$，所以 $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ 与整数之和 $6+5$ 的本质是一样的，只是要填上最小单位 $\frac{1}{30}$，即

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=6\times\frac{1}{30}+5\times\frac{1}{30}=(6+5)\times\frac{1}{30}=\frac{11}{30}$$

这个过程就完整的搭建了从整数到分数的扩张过程，同时推广了整数的四则运算到分数的四则运算。

用分数表示数字，表达精确但有明显的不足，第一，数值接近的两个分数，很难快速比较大小，比如 $\frac{141}{250}$ 和 $\frac{22}{39}$，直观上很难分辨大小；第二，分数的加减法，特别是大分母分数的加减法运算比较复杂。这两个问题直接的解决办法是通分，这也是其复杂度的来源。在面对整数的时候，没有这些困难，为什么呢？因为整数用位值计数，通过对比对应数位就能比较大小，对应数位加减就可以做两个数的加减法。便利性、实用性和直观性应该是小数产生的一个原因，阿拉伯数字的流行助推了小数的广泛应用，其实中国古代有小数思维的表达可以追溯到两千多年之前的秦汉，在《隋书·律历志上》中有下面一段描述：

“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末南徐州从事史祖冲之更开密法。以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，……”

可见，以丈为单位，尺就是十分位，寸就是百分位，依此类推。引用这段叙述主要是表达小数实际上是数字的一种表达形式，背后的理论依据是十进制（当然其它进位制也有对应的小数，我们这里小学生的认知思维的引导为目的，就以十进制为背景），即每个数位的位值都是其右边数位位值的10倍。这样整数的所有运算理论都可以应用到小数的集合，只要做好数位对应即可，小数点定位的是单位1，在实际应用中，认定不同的单位1，数字表现不同，比如苹果的价格6.89元，是以1元为单位，如果以1分为单位，就是689分，这充分表明小数点前后的数字具有相同的规律。

通过以上的分析和表述，可以发现，数系的扩展的源动力为运算，同时所有类型数字的运算是统一的，另外，数字的不同表达有明确的理论或者应用背景。对于小学生，在数字认知的同时，结合数字逻辑，适当分析和展现运算在数字中的核心地位对于小学生培养数集的代数结构框架思维有帮助，同时对于后续初中理解实数的有理数和无理数分类有非常重要的基础性作用。

初中阶段，学生的认知从分数（有理数）扩展到实数集，目前教材对于有理数的定义已经从“整数、有限小数和无限不循环小数统称为有理数”改为“可以写成分数形式的数称为有理数”，新的描述更符合数字逻辑，而不是简单的描述认知，但是教学中并没有阐述有理数的出现对于四则运算的意义，即促成了四则运算的封闭性，这也表明一个完整的系统有理数域的形成，本来可以守着有有理数域就可以了，但是像 $\sqrt{2}$ 这样的数字被证明不在有理数集内，这类数字被称为无理数，但是如何定义无理数呢？目前初中数学教材定义用到了“无限不循环小数又称为无理数”，这样的定义是让学生陷入“死记硬背”的学习模式，因为无限不循环是不易观察和验证的，这就使得学生对于无理数的认识只能一个一个的来，会给学生一个错觉，就是无理数“比较少”，但是实际上无理数比有理数“多很多”。

根据前面的分析，要理解好实数集就需要区分好有理数和无理数的逻辑关系，要明确这种关系，就需要把实数刻画好，正如其名称所描述，实数就是“度量”自然界中所有的“物”所能用到的所有的数的集合，简单点，就是平面线段所有可能长度的数字集合，这样的描述正是数字产生的源动力，即用来描述自然。实数利用线段长度定义，正好和“数轴上的点与实数一一对应”的解析几何的基本要求协调统一，有了实数的描述，首先容易知道有理数都是实数，这样就可以利用有理数和实数来描述无理数，即“不是有理数的实数就是无理数”，这个“定义”表面上好像“很无聊”，没有给无理数严格的界定，但却是比“无限不循环小数”的描述更科学。为什么呢？这是因为“无限不循环小数”是无法正面验证的，而“不是有理数”可以通过有理数的分数表达而变形为“不能表示为分数形式的实数”，这对数学来说很有意义，有了明确的界定，无理数的判断就有了依据，例如 $\sqrt{2}$ 为无理数，简述证明如下：

反证法，假设 $\sqrt{2}$ 为有理数，那么存在互素的正整数 p,q 使得 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$，两边同时平方得到 $2=\frac{q^2}{p^2}$，即 $2p^2=q^2$。显然 $2p^2$ 为偶数，从而 q^2 为偶数，进而 q 为偶数，不妨设 $q=2k$，其中 k 为正整数，带入得到 $2p^2=4k^2$，即 $p^2=2k^2$，这就得到 p 为偶数，这显然与 p,q 互素矛盾，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数，是无理数.

目前义务教育阶段的数学教育对证明题基本没有要求，课上的大部分结论都没有给出证明，出现的所谓证明都是判定性的验证证明，这极大影响了学生对于数学理论严谨性的理解和体验，也让很多学生对于很对数学结论的掌握以“记住”为学习目标，这很大程度上造成了思维主动性比较差的学生把数学学成了“文

科”科目，进入高中以及大学后，对于证明题依然延续着恐惧和抗拒。从我们对于小学期间分数和小数的学习，初中阶段对于有理数和无理数的教学分析，可以发现说清数学的逻辑并不难，关键是要关注数学的历史发展逻辑，让数学理论自然的“流出来”。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部．义务教育数学课程标准（2022版）[M]．北京师范大学出版社，2022
[2] 陈立华．突破传统教学体制 : 北京市朝阳区实验小学数字化教学实验与学生思维发展十年探索 [M]．教育科学出版社，2016.
[3] 金永翠．浅谈数学史在小学教学中的作用 [J]．内蒙古教育，2009(10) : 3.
[4] 胡晓敏．数学史融入小学数学教学的现状调查与分析 [J]．小学教学：数学版，2010(4) : 3.
[5] 蔡宏圣．数学史走进小学数学课堂 : 案例与剖析 教学方法及理论 [M]．教育科学出版社，2016.
[6] 刘毅．小学数学史教学策略谈 [J]．中小学教学研究，2010(11) : 3.
[7] 昌久萍．数学史在小学数学教学中的应用 [J]．课程教育研究，2012(26) : 1.
[8] 李明振，庞坤．数学史融入中学数学教材的原则方式与问题 [J]．数学通报，2006，45(3) : 3.
[9] 王晓丽．中美初中数学教材习题的比较研究——以有理数为例 [J]．中学数学：初中版，2017(7) : 4.
[10] 万荣庆．明晰教材意图拓宽教学思路凸显数学本质——”实数”概念的教学分析 [J]．中学数学教学参考：中旬，2012(11) : 3.
[11] 吴振廷．实数理论及其在中学数学中的应用 [M]．人民教育出版社，1981.
[12] 李龙才．依托有理数，了解实数的基本知识——人教版《义务教育教科书・数学》七年级下册第六章”实数”介绍 [J]．中学数学教学参考旬刊，2013(1) : 11-13.
[13] 刘四俊．实数概念教学的几点体会 [J]．中学数学杂志，2004(10) : 9-11.
[14] 王昆扬．谈中学数学课程中”实数” [J]．数学通报，2006，45(12) : 3.
[15] 戈砚辉．实数 (第1课时) [J]．中学数学教学参考，2022(29).