# 四色猜想中 H 构形 4-染色问题的解决

张彧典[1]，龚亦轩[2]，张奕然[3]

1.山西省盂县党校，山西 盂县 045100

2.上海东方财富，上海 200030

3.协鑫新源江苏分公司，江苏 南京 211100

**摘　　要：** 四色猜想[1]于1852年由英国格斯里（Guthrie）提出，1879年，肯普（Kempe）给出一个有价值的证明[2]，1890年，赫伍德（Heawood）给出一个构形，指出肯普证明中的漏洞，1921年，埃雷拉又给出一个比赫伍德构形更漂亮（具有十折对称性）的构形，我们把以上两个构形称之为 H 构形，这样的构形究竟有多少，而且都可以正确4-染色？成为世界数学家们一百多年以来试图解决的问题。

本文通过四个创新定理以及高中数学方法，成功解决了 H 构形的分类以及正确4-染色问题，是对《4- staining of "Staining Dilemma Configuration" in Four-Color Conjecture》[3]的修改、完善。

**关 键 词：** 四色猜想；埃雷拉构形；H 构形；十折对称；四色顶点四边形

# The solution of the H-conformation 4-staining problem in the four-color conjecture

Zhang Yudian[1], Gong Yixuan[2], Zhang Yiran[3]

1.Shanxi Yuxian Party School, Yuxian , Shanxi 045100

2. Shanghai Oriental Fortune , Shanghai 200030

3.Xiexin new energy Jiangsu Branch, Nanjing, Jiangsu 211100

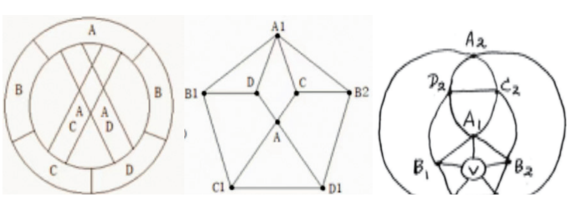
**Abstract:** The four-color conjecture[1] was put forward by Guthrie in England in 1852, Kempe gave the first valuable proof [2]in 1879, Heawood gave a configuration in 1890, and pointed out the loopholes in Kempe's proof. In 1921, Eerrera gave a configuration that was more beautiful (with ten-fold symmetry) than Heawood's configuration. We called the above two configurations H-configurations. How many such configurations are there, and all of them can be correctly 4- staining ? Become a problem that mathematicians around the world are trying to solve.

In this paper, the classification of H configurations and the correct 4- Staining problem are successfully solved by four innovative theorems and high school mathematics methods, which is the modification and perfection of 《4-Staining of" Staining DieEmma Configuration "in Four-Color Conjecture 》[3].

**Keywords:** **four-color conjecture; Errera conformation; H-conformation; tenfold symmetry; four-color vertex quadrilateral**

## 一、H 构形的数学模型

1935年，《美国数学学会杂志》发表了《部分染色地图上的一组操作》[4]，其中定义了“染色困局构形”，也就是“H 构形”，接着给出了基本模型，这种构形的主要特征就是把肯普证明 d（v）=5时只考虑到两条“极大链”[5]$A_1$-$C_1$、$A_1$-$D_1$相离的情形（我门把这样的构形称之为 K 构形）变成相交情形，如图1（1）所示，我们将其简化为8点式对偶图形式，如图1（2）或者1（3）所示：图（2）、（3）互为拓扑等价关系，图（2）是把图（3）中待染色顶点 V 拓扑变换到模型中与之相邻的五边形外部并且省略了。作者还给出了埃雷拉（Errera）构形，简记为“$E_1$构形”，本文所有构形都采用图1（2）表示方法。




（1）　　（2）、V在五边形之外　　（3）、V在五边形之内

> 图1：H 构形的数学模型

## 二、相关定义

定义1、构形

我们在肯普“构形”定义的基础上，给出“构形”的完整

作者简介：张彧典（1943.09-），男，汉族，山西省阳泉市盂县人，大专学历，退休前为盂县党校数学高级讲师，研究方向：世界著名数学难题“四色猜想”的人工证明，邮箱：E-Mail:zhangyd2007@sohu.com

龚亦轩，张奕然，负责四色猜想论文以及参考文献的收集与英文、中文的翻译、修改等工作。

定义，即正确的四染色构形由两部分组成：一是由点和边组成的几何结构，二是由某种四染色方案形成的“颜色分布图”（简称“色图”）。

定义2、色链，相反色链，极大链，十折对称，峰点，极大平面图

色链：构形中，任意不同染色的相邻顶点与它们之间的连线（称之为边）组成的点、边“路径”[6]称为色链，简称为链，如 A—B、A—C等；当色链呈现封闭的环时，称为环链，简称为环；

相反色链：如果两条色链染色不同，就称为相反链，比如 A-B链和 C-D链；

极大链：如果色链的起点与终点为五边形之不相邻的两个顶点时，称之为极大链，如图1中的 A1---C1、A1—D1等；

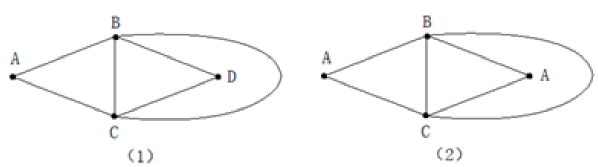
十折对称：也是文献5中给出的，是指埃雷拉构形的几何结构具有方向不同的十条对称轴，使得构形的点、边呈现左右对称，称为十折对称；

峰点[7]：设四色染色的五边形围栏中的 A色顶点被两个 B色顶点从两边托举在上面，好像山的顶点，所以称为峰点。

极大平面图[8]：顶点数固定而边数最多的平面图。本文所有附图都是图1（2）式构形。

定义3、四色顶点四边形和三色顶点四边形。

在用四种颜色正确染色的构形中，如果四个不同的染色顶点和连接它们的边围成一个最小四边形，那么这个四边形称为四色顶点四边形，如图2（1）；如果最小四边形的4个顶点只用三种不同颜色染色，那么这个四边形称为三色顶点四边形，如图2（2）。




> 图2：  最小四色、三色顶点四边形

## 三、四个创新定理

我门在长期研究前人证明四色猜想的成果基础上，独立发现了有别于前人的四个定理，下面逐一给出这四个定理及其证明。

定理1：

在用四种颜色正确染色的极大平面图中，不可避免地存在至少一个四色顶点四边形。

可以称为四色顶点四边形存在定理。

证明：（反证法）在用四种颜色正确染色的极大平面图中，如果没有至少一个最小四色顶点四边形，也就是所有的最小四边形都是三色顶点四边形，那么这个三色顶点四边形中的两个顶点的颜色一定相同，如图2中的（2），那么这个三色顶点四边形中的两个三角形的染色一定是相同的，整个地图中的所有三角形顶点也一定是用这样的三种颜色染色，也就是整个地图中的顶点只用这样的三种颜色染色，这与用四种颜色染色的条件相矛盾。

在图2中，(1) 和 (2) 的几何结构相同，只是色图中一个顶点染了不同颜色。 (1) 具有四色顶点的四边形包含在极大平面图中，这是最小四色地图； (2) 具有三色顶点的四边形包含在极大平面图中，这是最小三色地图。 显然，(1) 和 (2) 是矛盾的，这是对定理1的最好验证。

定理2：四色顶点四边形性质定理

（1）一个四色顶点四边形的两条对角链不能同时存在于同一个四色顶点四边形。

证明：由于一个四色顶点四边形中的四个顶点颜色不同，由两组不相邻顶点连接的对角链一定互为相反色链，所以它们不能相交，即不能同时存在于一个四色顶点四边形。

（2）在四色顶点四边形中，改变已知的对角链只能破坏原始构形的几何结构，而不会破坏原始构形的顶点染色分布即色图。

证明：改变具有四色顶点的四边形中已知的对角链，如图2中的（1），就是把已知的对角链 B—C变换为它的相反链 A—D，这时，只是改变了原始构形几何结构中边的组合， 而并没有涉及到原始构形中的所有顶点的染色，所以不会破坏原构形的顶点染色分布图 即色图。

这两个定理，提供了将十折对称几何结构转化为非十折对称几何结构的一个变换法则，可以称为非十折对称变换。

定理3：当构形不是十折对称且初始颜色为 CK0时，算法2.1不循环。

证明：

在2003年发表的《平面图的一个试探性四染色》（即文献7）中，作者科凯将 $E_1$构形表示为它的对偶图，称为 CK图，并证明了

引理3.1：“当初始染色为 CK0时，算法2.1循环，并以20为一个周期”，详细证明见文献7。

1992年，在《应该知道的赫伍德范例》（即文献5）中，作者米勒给出了一个“赫伍德图”，并证明了

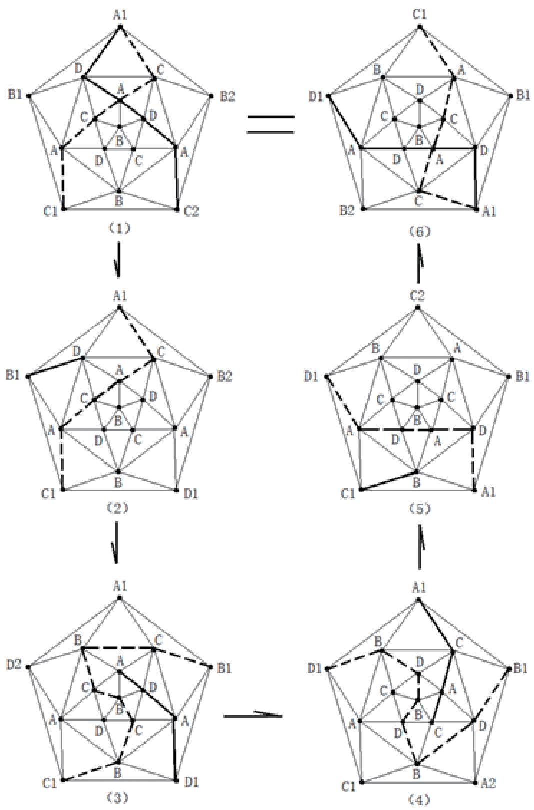
“当运用四种连续颠倒染色的赫伍德染色程序时，$E_1$构形循环”。

我们不妨在这里称之为引理3.2，详细证明见文献5，并且将“四次赫伍德颠倒染色”称为“H染色程序”。

文献7中的“CK图”与文献5中的“赫伍德图”都是“埃雷拉图”即 $E_1$构形， 文献7中的算法2.1与文献5中的 H染色程序相同，只是两个构形中的四种颜色标识和围栏上的排列方向不同（前者1、2、3、4为顺时针排列，后者 B、R、Y、G为逆时针排列），所以算法2.1的颠倒染色是顺时针方向，H染色程序的颠倒染色是逆时针方向，说明对于 $E_1$构形的周期循环，两个方向 (逆时针和顺时针) 的颠倒染色的结果是相同的。为方便起见，本文统一用 A、B、C、D表示四种不同的染色，并且把两种染色程序统一称为“H染色程序”。这时，引理3.1和引理3.2的证明，统一如图3所示：

在图3中，(1) 是当 E1构形处于初始位置时，A-C链 (用虚线表示) 和 A-D链 (用粗黑线表示) 相交形成的色图。在 (2)-(5) 中，虚线代表已知或生成的极大链， 粗黑线表示颠倒染色的色链。

当沿箭头逆时针方向依次进行 B-D、D-A、A-C、C-B四次

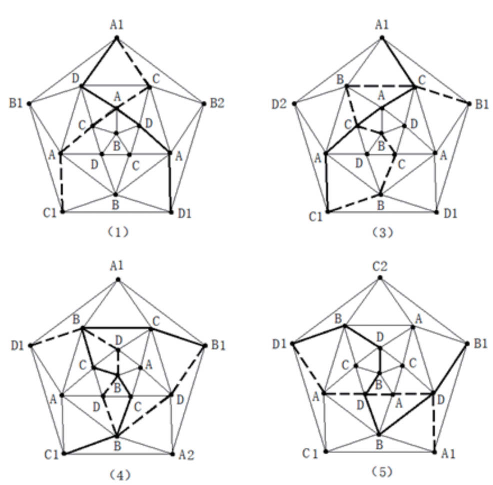



> 图3、E1构形的周期循环过程

颠倒染色（即一个H染色程序），见（2）、（3）、（4）、（5），(6)就是经过四次颠倒染色后生成的构形。对比(1)和(6)不难发现，两种构形的几何结构一样，都具有十折对称性，色图也一样，只是(6)的色图位置是从(1)顺时针旋转了144°。

当图(6)再经过4个H染色程序，即总共5个H染色程序20次(4次X5)颠倒染色时，E1构形的几何结构和染色完全旋转回到图(1)的初始位置。

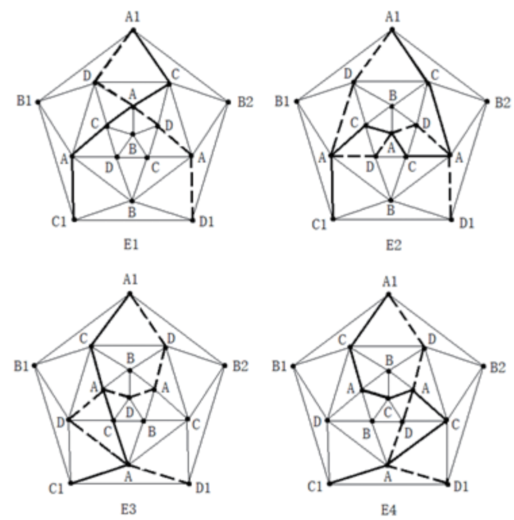
在图3中，当进行H染色程序时，由于连续四次颠倒染色，图(1)和连续演变的图(3)、(4)和(5)形成一个循环周期。完整考察它们的色图，仍然存在两条相交色链，属于H构形，只是峰点的位置不同，如图4所示：




> 图4：$E_1$构形的四个连续变化的完整色图

在图4中，它们的几何结构没有变化，都具有十折对称性，但颜色图发生了变化：从峰点$A_1$、$C_1$、$B_1$、$D_1$开始的两条极大链(用虚线和实线标记)的组合不同。

当图4所示的四种不同的E构形全部变成峰点为A的"BAB"分布，而且峰点A的位置如同基本模型时，即可得到图5所示的四种H构形，称为E族4构形，简记为$E_1$、$E_2$、$E_3$、$E_4$。




> 图5：E族中的四种同态构形

检查图5中的四个同态构形，不难发现，它们的几何结构都是十折对称的，但是它们的色图是不同的。当我们分别对它们施行H染色程序时，无论方向如何(顺时针或逆时针)，构形都会周期循环。是什么因素决定了它们的循环呢？我们认为：几何结构的十折对称与色图都是不可或缺的因素。因此，引理3.1和引理3.2的条件是不完善的，应该分别完善为

引理3.1'：

当E1构形具有十折对称且初始染色为CK0时，算法2.1循环并以20为一个周期。

引理3.2'：

当对E1构形施行四种连续颠倒染色的H染色程序时，具有十折对称的E1构形染色循环。

如果把完善以后的引理3.1'作为原定理，那么引理3.2'就是引理3.1'的逆定理。这时，根据高中数学关于四个命题真假性的四种不同组合，如图6所示，由于引理3.1'与引理3.2'都是真命题，因此可以判断这四个命题都是真命题，因此，文献7中引理3.1'的否定理也是成立的，即

一般地四种命题的真假性，有且仅有以下四种情况。

| 原命题 | 逆命题 | 否命题 | 逆否命题 |
|---|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 | 真 |
| 假 | 假 | 假 | 假 |
| 假 | 真 | 真 | 假 |
| 假 | 假 | 假 | 假 |

> 图6 四种命题的真假性

到此证明了，定理3"当构形不是十折对称且初始颜色为CK0时，算法2.1不循环"成立。

由定理3，可以得到

推论：对于任何一个非十折对称的H构形，施行H染色程序

有限次以后就可以给构形正确4—染色。

定理3及其推论就为“非十折对称的H构形4-染色”提供了一个理论证明。

定理4　Z—染色程序对于E-族构形4—染色是可行的。

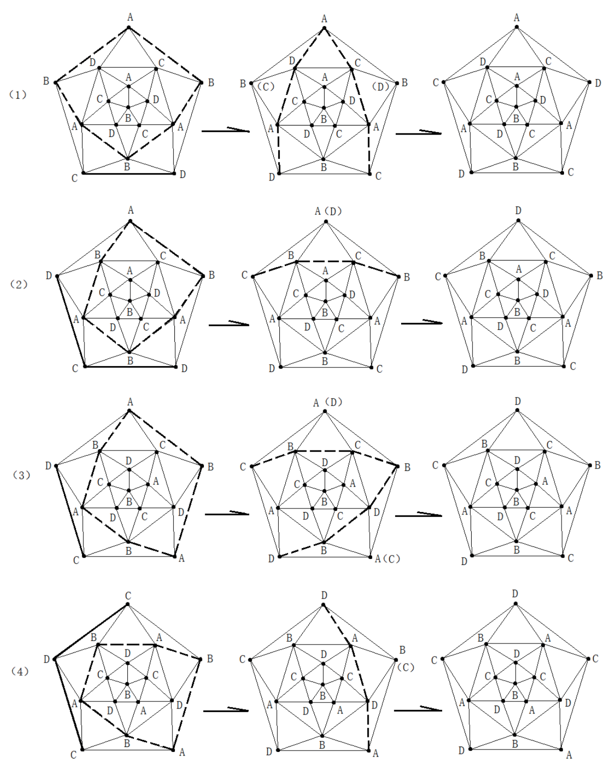
证明：

由于E族4构形在施行H染色程序时发生周期循环，证明它们不能用这种方法进行4-染色，但是在四个最小E构形中，$E_1$和$E_2$包含特征链A-B环，$E_3$和$E_4$包含特征链C-D环。基特尔曾经给出$E_1$构形一种特殊解法，称“切链换色法”（见文献4），但是他以及后人并没有发现$E_1$构形还有3个同态构形，并且给出这三个构形的解法，我们通过对E族4构形的求解，把欧文.基特尔单一的“切链换色法”，扩充为两种不同的“张氏染色程序”（简记为“Z染色程序”）。由于E1与E2是可以互相转化，属于一个类型，E3与E4具有左右对称性，属于另一个类型，所以，下面仅给出$E_1$和$E_4$代表的构形的4-染色证明（即把五边形顶点的染色数从4减少到3从而可以给省略了的V染第4种颜色）就够了。

E1的详细染色过程如图7所示：

当已知图（1）或（3）时，首先颠倒A-B环外C-D链(粗黑线)的染色，生成不相交的A-C、A-D(或B-C、B-D)极大链，然后颠倒孤点色B(D)、B(C)[或A(D)、A(C)]，将五边形的顶点染色数减少到3，见图（1）或（3）所示。

当已知图（2）或（4）时，首先颠倒A-B环外C-D链(粗黑线)的染色，生成新的B-C(或A-D)极大链，然后颠倒孤点色A（D）[或B(C)]，将五边形的顶点染色数减少到3，见图（2）或（4）所示。

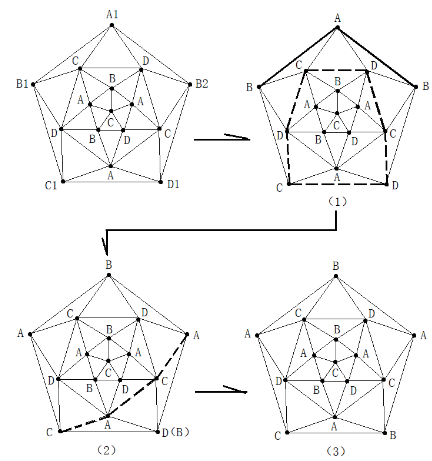


> 图7：E1在一个周期中连续变换的四种构形的4-染色过程

[图7中左边的初始构形（1）(2)（3）(4）就是图4中的（1）(3)（4）(5）]

至于$E_4$的详细证明，只给出初始构形的4--染色证明就足够了，而不用像$E_1$那样给出一个周期中连续变换的4个构形的全部4-染色证明。如图8所示。

首先在图（1）之C-D环[图(1)中的虚线]外颠倒A-B链(粗黑线)的染色，生成新的A-C极大链[图(2)中的虚线]，然后颠倒A-C极大链下的孤点[图(2)中的大黑点]染色D（B），使得图(3)中五边形顶点染色数减少到3。



> 图8，$E_4$构形初始构形的4-染色过程

图7和图8的4-染色方法就是Z染色程序，表明Z染色程序对于E族四个构形的4-染色是可行的，即定理4成立。

下面，需要探讨的是E族四构形的放大问题，也就是看看定理4对于E族四构形的所有放大构形是否仍然可行?

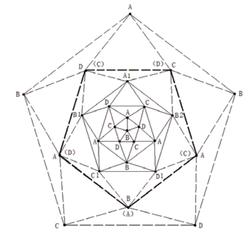
我们运用数学归纳法，把对E族四构形的正确4-染色证明作为归纳基础证明，然后进行归纳假设证明定理4仍然成立。

假设Z-染色程序在K=16+5n（n为自然数）的E族构形中是可行的，现在证明当K=16+5(n+1)（n为自然数）时Z染色程序仍然是可行的。

十折对称的几何结构的特征是由内到外交替排列的五边形和五角星，由于E族4构形都具有十折对称的几何结构，所以，我们只研究E1构形的放大就足够了。

如图9所示，实线表示K=16+5n(n为自然数)，虚线表示在归纳基础图（实线图）外部（也可以在内部）扩展的四色构件即两个五边形被一个五角星间隔，整个图形仍然显示出十折对称性。

当第k个五边形(粗虚线)的染色为BACDA[或（A）（C）（D）（C）（D）]时，第(k+1)个五边形即扩展构形的五边形的顶点染色必须为ABCDB，才能保证与$E_1$五边形围栏染色$A_1B_1C_1D_1B_2$相同，特征环A-B(或C-D)仍然存在。否则，构形就变成肯普已经证明了的简单构形了。这时，Z染色程序对于扩展构形仍然可行。



> 图9、E1的向外扩展

但是，当上述四色构件在最小 E- 构形的外扩区域仍呈现十折对称性时，从图9的解析可以看出，增加的色边只是最小 $E_1$ 构形 A1-C1、A1-D1相交链在外扩区域的延长，因此这样的向外扩展就没有必要研究了，这是因为：

当我们在这个放大的十折对称的 E 族构形中，施行5个 H 染色程序（20次颠倒染色）时，10（1）中加黑点的五边形的5条边都没有参与全图几何结构的周期循环，成为无用边，那么只包含这种边的四色构件也就是无用的了。由此证明了，在 E 族构形外扩区域内加入包含无用边的四色构件的情形是没有研究价值的。

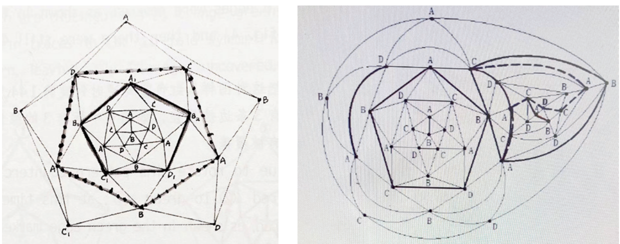


图10（1）　　图10 (2)

> 图10

有了这样的理性认识，就可以解释文献7中给出的图6 [ 本文编号为图10（2）]所提出的两个疑问：

如10（2）中，粗黑线五边形以内表示最小 $E_1$ 构形，虚线表示外扩区域，右边三色顶点四边形 ABCB 内嵌入一个四色构件，只是包含了对角链 A—C，即在这条边上增加了3个顶点，文献7作者由此质疑：既然全图几何结构已经失去十折对称性，但是为什么不影响算法2.1（即 H 染色程序）以及构形周期循环呢？这样的构形还有多少？

正是由于嵌入的四色构件只是包含了三色顶点四边形中的对角链 A-C（无用边），所以这个四色构件也就成为无用的了。这种嵌入的四色构件一定只包含于 图10（1）中加黑点的5条边所在的5个三色顶点四边形 ，也就是说，像图10（2）那样的无用构形只有5个。

## 四、H 构形的 4- 染色证明

首先，我们对 H 构形进行分类，法则是，看 H 构形的几何结构是否具有十折对称性？具体做法是：

利用四色四边形的性质定理2（1），在具有十折对称的 E 族4构形中，把已知四色顶点四边形中的对角链用它的相反色链替换，使几何结构不再具有十折对称性。经考察，4个 E 构形一共有62个四色顶点四边形，其中不破坏构形中 A1-C1、A1-D1特征链与 A-B 或 C-D）特征环的对角链只有26条 (在 E1—E4中的分布为8+8+5+5)。通过26条对角链1—8（1-5）不同数量组合的变换，就可以得到572个非十折对称的 H 构形，组成第一类 H 构形集，而具有十折对称的 E 族4个构形就组成第二类 H 构形集。

下面给出这两大类 H 构形的可4—染色证明：

对于第一类非十折对称的 H 构形的可4--染色，已经给出一个定理3（与推论）的理论证明，不需要对572个构形一一4- 染色，读者可以在《用色链组合理论证明四色猜想》[9]与《肯普证明的完善》[10]中得到检验。

对于第二类 H 构形的可4--染色，从已经给出的上述数学归纳法证明过程看，归纳假设证明是没有意义的，只要用定理4证明 E 族4构形成功4- 染色就足够了。

综上所述，本文已经实现了文献7中的判断：如果能找到染色困局构形（即 H 构形）的某些操作或者是某些操作集合，能使得所有地图在施行这些操作后都不会继续保留在染色困局（即不再是 H 构形而变成 K 构形）里，那么四色问题也就获得解决了。

同时实现了1976年给出四色猜想计算机证明的阿佩尔预见：四色问题的一个简短证明有朝一日会被发现，甚至被一个因此而一举成名的天才高中生所发现。

*参考文献*


[1] 王献芬，胡作玄，四色定理的三代证明，自然辩证法通讯，2010，4（32），42-48。

[2]张忠辅，数学的陷阱，上海自然杂志，1991年，5（14），379-381.

[3]Yudian Zhang，Lichong Zhang 4- staining of " Staining Dilemma Configuration" in Four-Color Conjecture Journal of Applied Mathematics and Physics，应用数学与物理，2022，3（10）， 915—929

[4]欧文・基特尔，部分染色地图的操作，美国数学学会公报，1935，6（41），407-413。

[5]Holryd F.C，Miller R。赫伍德应该给出的范例，牛津数学季刊，1992，43(2)，67-71。

[6]江嘉禾，四色地图问题的解决，世界科学译刊，1979，04，49-64。

[7]khamis Carr and William Kokai，一种试探式的平面图四染色，J. Comb，2003(46)，97-112

[8]许寿椿，图说四色问题，北京大学出版社，2007，25。

[9]张彧典等，《Prove four-color conjecture with color chain combination theory》，日本研究杂志，2024，7（5）。

[10]张域典，肯普证明的完善，忻州师范学院学报，2004，02（20），64-68 。