

高考数学中数列问题的递推关系与通项公式求解技巧

隋玉微

天津滨海高新技术产业开发区第一学校, 天津 300450

摘要： 本文围绕高考数学数列问题展开，分析天津考题趋势，指出其难度增加、抽象化和符号化的特点。以 2023 年真题为例，详细阐述数列递推关系与通项公式的求解技巧，包括定义法、递推法、构造法和数学归纳法等，并提出应对抽象化、符号化问题的策略，为考生备考和教师教学提供参考。

关键词： 高考数学；数列问题；递推关系；通项公式；解题技巧

Recursive relationships and general term formula solving techniques for sequence problems in Gaokao mathematics

Sui Yuwei

Tianjin Binhai Hi-Tech Industrial Development Zone First School, Tianjin 300450

Abstract： This article focuses on sequence problems in Gaokao mathematics, analyzes the trend of Tianjin examination questions, and points out their characteristics of increasing difficulty, abstraction, and symbolization. Taking the 2023 real exam questions as an example, it elaborates on the solving skills of sequence recursive relationships and general term formulas, including the definition method, recursive method, construction method, and mathematical induction method. It also proposes strategies to deal with abstraction and symbolization problems, providing references for candidates' preparation and teachers' teaching.

Keywords： Gaokao mathematics; sequence problems; recursive relationships; general term formulas; problem-solving skills

引言

数列作为高考数学的重要组成部分，一直以来都备受关注。近年来，天津高考数列题的难度和形式发生了显著变化，特别是倒数第二道大题，更加注重对递推关系和通项公式的深入考查，呈现出抽象化、符号化程度增加的趋势。掌握有效的求解技巧对于学生在高考中取得优异成绩至关重要。

一、数列递推关系与通项公式的基本概念与理论

数列在高考数学中占据关键地位，其递推关系与通项公式是重点考查内容。在天津高考数列题中，难度提升、抽象化与符号化趋势明显。本章将深入探讨数列递推关系与通项公式的基本概念与理论，从数列定义与表示、递推关系类型特点到通项公式意义求法，为后续理解高考数列题变化及解题技巧夯实基础。

（一）数列的定义与表示

数列是按照一定顺序排列的一列数，通常用 a_n 表示数列的第 n 项，数列可以记为 $\{a_n\}$ 。

高考中，关于数列知识的考查，大部分都是基于《数列的概念与简单表示法》上进行的。主要考查方式有：（1）以数列的前几项为背景，考查“归纳—推理”思想，考查应用意识和创新意识；（2）考查已知数列的通项公式或递推数列，求数列的某项；

（3）考查由数列的递推关系式求数列的通项公式，已知 S_n 与 a_n 的关系求 a_n 等。

重点与难点：（1）通过对一列数或者数阵的观察、归纳，写出符合条件的一个通项公式；（2）由数列的递推公式求数列的通项公式；（3）数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系的应用^[1]。

（二）递推关系的类型与特点

1. 一阶递推关系

形如 $a_{n+1} = f(a_n)$ 的递推关系，常见的如等差数列的递推关系 $a_{n+1} = a_n + d$ （ d 为公差）和等比数列的递推关系 $a_{n+1} = qa_n$ （ q 为公比）。

2. 二阶递推关系

$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$ ，例如斐波那契数列 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 。

（三）通项公式的意义与求法

通项公式 $a_n = g(n)$ 能够直接根据项数 n 计算出数列的第 n

项。求通项公式的方法包括公式法（针对等差、等比数列）、累加法、累乘法、构造法等^[2]。

二、天津高考数列题趋势分析

天津高考数列题目的变化趋势对考生提出了更高挑战。第二章将详细剖析其趋势特点，阐述难度增加在综合知识运用和逻辑推理方面的体现，分析抽象化于概念表述和关系构建上的表现，探讨符号化在符号使用及运算上的特征，使读者明晰数列题的发展方向，为后续解题技巧的学习和应对策略的制定提供指引。

（一）难度增加的表现

1. 综合运用知识的要求提高

以往数列题目可能更多侧重于单一知识点的考查，如简单的等差数列或等比数列的通项公式计算。而现在的题目往往需要考生综合运用多个数列知识点，甚至结合函数、不等式等其他数学知识进行求解。例如，在一些题目中，需要考生先判断数列的类型，再根据数列的性质建立不等式关系来确定参数的取值范围，这要求考生对数列知识有更深入的理解和更灵活的运用能力^[3]。

2. 逻辑推理过程的复杂性增强

现代高考数列题目的逻辑链条更长，推理步骤更为复杂。考生需要从题目中挖掘出更多的隐含条件，进行层层递进的推理^[4]。例如，在涉及数列递推关系的证明题中，需要考生通过巧妙的变形和推导，将复杂的递推关系转化为熟悉的形式，这对考生的逻辑思维能力是一个极大的考验。

（二）抽象化特点

1. 概念的抽象表述

数列题目的表述中越来越多地使用抽象的数学概念和术语。例如，不再直接给出数列的具体项数或明确的数值关系，而是通过集合、映射等抽象概念来定义数列。这使得考生需要具备更强的抽象思维能力，能够从抽象的表述中准确把握数列的本质特征，建立起正确的数学模型。

2. 关系的抽象构建

题目中数列之间的关系也变得更加抽象。如给出两个数列之间的一种抽象对应关系，要求考生根据这种关系推导出数列的通项公式或其他性质^[5]。这种抽象关系的构建需要考生具备较高的数学洞察力，能够透过现象看本质，将抽象的关系转化为具体的数学表达式。

（三）符号化特征

1. 符号的大量使用

在数列题目中，各种数学符号的使用频率显著增加。不仅包括常见的数列通项符号 a_n 、前 n 项和符号 S_n 等，还涉及一些新定义的符号或参数符号^[6]。例如，在一些题目中会引入自定义的符号来表示数列的某种运算或性质，考生需要准确理解这些符号的含义，并熟练运用它们进行计算和推导。

2. 符号运算的复杂性

符号化的题目往往伴随着复杂的符号运算。考生需要根据题目中的符号关系进行代数运算、等式变形等操作^[7]。这要求考生具

备扎实的符号运算基础，能够熟练运用代数运算法则和公式，准确地进行符号化简和推导，以得出最终的结果。

三、2023年天津高考数列真题剖析

近年来，天津高考数列题目的难度和复杂度不断提升，呈现出抽象化和符号化的显著趋势。这就要求考生在掌握数列基本概念和常规解法的基础上，具备灵活运用各种技巧、深入分析问题本质的能力。本章节将以2023年天津高考数列真题为例，详细剖析其解题思路与技巧，为同学们应对数列问题提供有益的参考和指导。

（一）题目内容

已知 $\{a_n\}$ 等差数列， $a_2 + a_5 = 16, a_5 - a_3 = 4$ 。

1. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_i$ 。

2. 已知 $\{b_n\}$ 为等比数列，对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$ ，若 $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$ ，则 $b_k < a_n < b_{k+1}$

（I）当 $k \geq 2$ 时，求证： $2^k - 1 < b_k < 2^k + 1$ ；

（II）求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和。

（二）解题思路与技巧

1. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_i$ 。

（1）解题思路

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d 。

已知 $a_2 + a_5 = 16, a_5 - a_3 = 4$ ，根据等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，将 $a_2 = a_1 + d$ ， $a_3 = a_1 + 2d$ ， $a_5 = a_1 + 4d$ 代入已知条件，得到关于 a_1 和 d 的方程组，解方程组求出 a_1 和 d ，进而得到通项公式 a_n 。

对于 $\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_i$ ，先根据通项公式写出 a_i 的表达式，再利用等差数列求和公式 $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 进行求和计算。

（2）技巧

在根据已知条件列方程组时，要准确代入通项公式，避免计算错误。

解方程组时，可以通过两式相减或相加等方法简化计算，如 $(a_1 + 4d) + (a_1 + d) = 16$ 与 $(a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 4$ 联立求解，先求出 d ，再求 a_1 。

求 $\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_i$ 时，先找出首项 $a_{2^{k-1}}$ 和末项 a_{2^k-1} ，再代入求和公式。

2. （I）当 $k \geq 2$ 时，求证 $2^{k-1} < b_k < 2^{k+1}$ ；

（1）解题思路

当 $k \geq 2$ 时，根据条件 $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$ ，在这个范围内找到 a_n 的最值。

因为 a_n 是等差数列，其单调性由公差 d 决定（本题中 $d > 0$ ，单调递增），所以 $a_{2^{k-1}}$ 是该范围内的最小值， a_{2^k-1} 是最大值。

求出 $a_{2^{k-1}}$ 和 a_{2^k-1} 的表达式，再结合 $b_{k-1} < a_{2^{k-1}}, a_{2^k-1} < b_k$ ，进行推导证明。

(2) 技巧

求 $a_{2^{k-1}}$ 和 a_{2^k-1} 时, 准确代入等差数列通项公式, 注意指数运算。

在推导过程中, 利用已知的 $b_{k-1} < a_{2^{k-1}}, a_{2^k-1} < b_k$, 以及等比数列性质 (若 $m, n, p \in N^+$, 则 $b_m < b_n < b_p$) 进行放缩证明。

(II) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和

(1) 解题思路

由 (I) 的结论 $2^{k-1} < b_k < 2^{k+1}$, 当 $k=1$ 时, 可确定 b_1 的范围, 再结合 b_1 为整数求出 b_1 的值。

当 $k \geq 2$ 时, 根据 $b_{k-1} < a_{2^{k-1}}, a_{2^k-1} < b_k$, 以及 a_n 的通项公式, 求出 b_k 与 b_{k-1} 的关系, 从而确定等比数列 $\{b_n\}$ 的公比, 进而得到通项公式 b_n 。

根据等比数列求和公式 $T_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ (其中 q 为公比) 求出前 n 项和 T_n 。

(2) 技巧

求 b_1 时, 利用 $k=1$ 时 $1 \leq n \leq 1$, 即 $n=1$, 结合 a_1 的值和 b_1 的范围确定 b_1 。

求公比 q 时, 通过 $\frac{b_k}{b_{k-1}}$ 的极限值 (当 $k \rightarrow +\infty$) 来确定, 计算过程中利用指数函数的性质进行分析。

求前 n 项和时, 注意公比是否为 1, 若公比为 1, 则 $T_n = nb_1$, 本题公比不为 1, 按公式准确计算。

四、数列递推关系与通项公式求解技巧

在深入了解天津高考数列题趋势及相关理论后, 本章聚焦数列递推关系与通项公式的求解技巧。面对数列问题的复杂性, 掌握有效的解题方法至关重要。本章将系统介绍定义法、递推法、构造法和数学归纳法等实用技巧, 结合具体例子详细讲解, 助力考生提升解题能力, 在高考数列问题中做到游刃有余。

(一) 定义法

1. 原理

定义法是根据等差数列和等比数列的定义来求解通项公式的方法。对于等差数列, 若 $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数), 则该数列是等差数列, 其通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$; 对于等比数列, 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (q 为常数且 $q \neq 0$), 则该数列是等比数列, 其通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$ [8]。

2. 应用举例 (以 2023 年天津高考数列题为例)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 = 5$, $a_5 = 14$ 。

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d 。

根据等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 由 $a_2 = 5$ 可得 $a_1 + d = 5$; 由 $a_5 = 14$ 可得 $a_1 + 4d = 14$ 。

解方程组 $\begin{cases} a_1 + d = 5 \\ a_1 + 4d = 14 \end{cases}$, 将第一个方程 $a_1 + d = 5$ 移项得 $a_1 = 5 - d$, 代入第二个方程 $a_1 + 4d = 14$ 中, 得到 $5 - d + 4d = 14$, 即 $3d = 9$, 解得 $d = 3$ 。

将 $d = 3$ 代入 $a_1 = 5 - d$, 得 $a_1 = 5 - 3 = 2$ 。

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ 。

(二) 递推法

1. 原理

递推法是通过分析数列的递推关系, 逐步推导出通项公式的方法。常见的递推关系有 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ (累加法)、 $a_{n+1} = a_n \times f(n)$ (累乘法) 等形式 [9]。对于累加法, 当 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 时, $a_n - a_{n-1} = f(n-1)$, $a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2)$, ... $a_2 - a_1 = f(1)$, 将这些式子累加可得 $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$, 从而求出 a_n ;

对于累乘法, 当 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1)$, $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2)$, ... $\frac{a_2}{a_1} = f(1)$, 将这些式子累乘可得 $\frac{a_{n+1}}{a_1} = f(n) \times f(n-1) \times f(n-2) \dots f(1)$, 然后, 求解 $a_{n+1} = a_1 \times f(n) \times f(n-1) \times f(n-2) \dots f(1)$, 进而求出 a_n 。

2. 应用举例

假设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n$ (这是一个符合累加法形式的递推关系)。

$a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$, $a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2)$, ... $a_2 - a_1 = 2 \times 1$ 。

将这些式子累加得:

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times (n-1) \\ &= 2 \times (1 + 2 + \dots + (n-1)) \\ &= 2 \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$ 。

(三) 构造法

1. 原理

构造法是通过构造数列的递推关系进行适当变形, 构造出一个新的等差数列或等比数列, 从而求出原数列通项公式的方法。例如, 对于形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1$) 的递推关系, 可设 $a_{n+1} + x = p(a_n + x)$, 展开得到 $a_{n+1} = pa_n + px - x$, 通过对比系数求出 $x = \frac{q}{p-1}$, 此时数列 $\{a_n + x\}$ 就是一个首项为 $a_1 + x$, 公比为 p 的等比数列, 进而可求出 a_n 。

2. 应用举例

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$ 。

设 $a_{n+1} + x = 3(a_n + x)$, 展开得 $a_{n+1} = 3a_n + 2x$, 对比 $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 可得 $2x = 2$, 解得 $x = 1$ 。

则 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$, 所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 $a_1 + 1 = 2$, 公比为 3 的等比数列。

根据等比数列通项公式可得 $a_n + 1 = 2 \times 3^{n-1}$, 则 $a_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$ 。

(四) 数学归纳法

1. 原理

数学归纳法是一种用于证明与自然数有关的命题的方法。对于数列通项公式的证明, 首先验证 $n=1$ 当时命题成立, 然后假设 $n=k$ 当时命题成立, 在此基础上证明当 $n=k+1$ 时命题也成立, 从而得出对于所有自然数 n , 命题都成立的结论。

2. 应用举例

证明数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2$ （假设已经通过其他方法得到了这个猜想）。

当 $n=1$ 时， $a_1 = 1^2 = 1$ ，命题成立。

假设当 $n=k$ 时， $a_k = k^2$ 成立。

当 $n=k+1$ 时， $a_{k+1} = a_k + 2k + 1$ （根据数列的某种递推关系假设），将 $a_k = k^2$ 代入可得 $a_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ ，即当 $n=k+1$ 时命题也成立。

所以由数学归纳法可知， $a_n = n^2$ 对于所有自然数都成立。

五、应对抽象化、符号化数列问题的策略

随着天津高考数列题抽象化、符号化程度的加深，应对这些变化成为关键。这一部分着重探讨应对策略，从深入理解抽象概念入手，强化基础学习并建立实例联系；提升符号解读与运算能力，系统学习符号体系并多做练习；培养逻辑思维与分析能力，学习推理方法并构建解题框架，为攻克数列难题提供全面指导，助力考生适应高考数列新要求。

（一）深入理解抽象概念

1. 强化基础概念学习

重新梳理数列的基本概念，包括数列的定义、通项公式、递推关系等，确保对这些概念的内涵和外延有清晰的理解^[10]。通过多做一些概念辨析题，加深对抽象概念的认识。例如，对于数列极限的概念，可以通过分析不同数列的极限情况，理解极限的本质含义。

2. 建立抽象概念与具体实例的联系

在学习抽象概念时，积极寻找与之对应的具体实例。比如，在学习等比数列的抽象定义时，可以联想到银行存款利息的计算模型（本金按一定利率逐年增长），这样有助于将抽象概念具象化，更好地理解和运用。

（二）提升符号解读与运算能力

1. 系统学习符号体系

对高中数学中常用的符号进行系统复习，包括集合符号、函

数符号、数列符号等。了解每个符号的含义、用法和运算规则。

例如，对于求和符号 Σ ，要熟练掌握其展开和计算方法。

2. 多做符号化练习题

选择一些符号化程度较高的数列练习题进行专项训练。在练习过程中，注重对符号关系的分析和理解，逐步提高符号运算的准确性和速度。同时，要学会将复杂的符号表达式进行化简和变形，以便更好地解决问题。

（三）培养逻辑思维与分析能力

1. 学习逻辑推理方法

学习逻辑推理的基本方法，如演绎推理、归纳推理和类比推理等。在数列问题的解决中，运用这些方法进行分析 and 推导。例如，在分析数列的递推关系时，可以通过归纳推理找出规律，再用演绎推理进行证明。

2. 构建解题思维框架

对于数列问题，建立起一套解题思维框架。首先，仔细审题，明确题目中的已知条件和所求问题；然后，分析数列的类型和特点，选择合适的求解技巧；接着，进行具体的计算和推导；最后，检查答案的合理性。通过这样的思维框架，提高解题的逻辑性和准确性。

六、结束语

数列问题在天津高考数学中的重要性不言而喻，其难度的增加、抽象化和符号化的趋势对考生提出了更高的要求。通过掌握定义法、递推法、构造法、数学归纳法等多种求解技巧，并运用应对抽象化和符号化问题的策略，考生能够更好地理解和解决数列问题。在备考过程中，考生应注重对数列基础知识的深入理解，加强对抽象概念和符号运算的训练，培养逻辑思维和分析能力。教师在教学中也应引导学生关注数列问题的变化趋势，针对性地进行教学和辅导，帮助学生提高数列问题的解题能力，从而在高考中取得优异的数学成绩。未来，随着数学教育的发展，数列问题的研究和教学方法也将不断创新和完善，为学生提供更有效的学习途径和方法。

参考文献

- [1] 杨苍洲. 数列的概念与简单表示法 [J]. 数学教学通讯, 2012, (32): 22-23.
- [2] 李宽珍. 大概念视域下的章节起始课研究——以《数列的概念与简单表示》为例 [J]. 中学数学教学, 2023, (06): 37-39.
- [3] 汪薇. 建构自然、高效的数学概念课堂——以“数列的概念与简单表示法”教学为例 [J]. 数学教学通讯, 2023, (06): 30-32.
- [4] 颜琼英. 高中数列中渗透数学文化的教学设计研究 [D]. 西北师范大学, 2021. DOI: 10.27410/d.cnki.gxbfu.2021.001674.
- [5] 蒋菁菁. “数列的概念与简单表示法 (1)”的教学设计（第一课时）[J]. 新教育, 2020, (19): 29-30+42.
- [6] 王发成, 魏元洪. 概念教学：基于课程标准，注重目标导向——“2.1 数列的概念与简单表示法”的教学设计与反思 [J]. 数学学习与研究, 2020, (07): 122-123.
- [7] 方书英. 基于核心素养下的数学概念教学——以《数列的概念与简单表示法》为例 [J]. 数学大世界（中旬），2019, (04): 7-8+19.
- [8] 石偲星. 高中数学教学中渗透数学文化案例研究——《数列的概念与简单表示法》（第一课时）[J]. 新课程（下），2019, (03): 93.
- [9] 王雨佳. 《数列的概念与简单表示法》教学设计 [J]. 高考, 2018, (36): 39.
- [10] 王进. 怎样在《数列》教学中渗透数学文化——“数列的概念与简单表示法”第一课时导入为例 [J]. 数学大世界（上旬），2020, (11): 43.