# 奇异积分算子在加权 Morrey 空间上的有界性

杨帅
苏州健雄职业技术学院，江苏 苏州 215400

**摘　　要：** 由 Calderón、Zygmund 等人建立的奇异积分理论，建立了 $R^n$ 上 Fourier 分析的实解，为近代调和分析的研究开辟了新的道路。调和分析中含有多种理论，如函数空间理论、加权理论以及多线性算子理论等，更多是为了对 Hardy-Littlewood 极大算子进行研究。在 PDE、复变函数、位势理论和非线性分析等学科中具有重要意义，在其他学科如量子力学中有着重要的应用，本文立足奇异积分算子在加权 Morrey 空间上的有界性，对其进行分析和处理，希望能够深化二者关系，并进行深入研究。

**关 键 词：** 奇异积分算子；加权 Morrey 空间；有界性

## Boundedness of the Singular Integral Operator on the Weighted Morrey Space

Yang Shuai
Suzhou Chien-Shiung Institute of Technology, Suzhou, Jiangsu 215400

**Abstract:** The singular integral theory established by Calderón, Zygmund et al. established the real solution of Fourier analysis on $R^n$, opening up a new way for modern harmonic analysis. There are many theories in harmonic analysis, such as function space theory, weighting theory and multilinear operators theory, etc., mainly for the study of Hardy-Littlewood maximum operators. It is of great significance in PDE, complex variables functions, potential theory, nonlinear analysis and other disciplines, and has important applications in other disciplines such as quantum mechanics. Based on the boundedness of singular integral operators on weighted Morrey Spaces, this paper analyzes and deals with it, hoping to deepen the relationship between the two and conduct in-depth research.

**Keywords:** singular integral operator; weighted Morrey space; boundedness

## 引言

Fourier 分析源于 1810 年 Fourier 在研究中提到的元 Fourier 级数收敛性、求和方法等。各国学者和专家对此都在进行持久研究，经过长期的探索和尝试，Calderón 和 Zygmund 于 20 世纪 50 年代，提出了奇异积分算子理论，之后更是将其进行了大力推广，并且开始在 $R^n$ 上的 Fourier 分析中开始应用。数十年以来，多线性算子理论，齐型空间，非齐型空间上的调和分析，在 PDE，多复变函数，位势理论、非线性分析、信号处理等方面都对其进行了广泛应用，取得了不错的成效。量子力学和神经系统等多个学科都有着广阔的发展前景，是当代数学的重要研究方向。多线性算子论是最近几年来国内外和谐分析领域的热门课题，得到了越来越多的重视，且取得了快速发展。本文选取奇异积分算子为切入点，针对其在加权 Morrey 空间上的有界性进行简要探讨，随后文中分析了其意义，随后对国内外相关的研究动态进行了论述，最后对其发展和应用进行了探讨，希望可以加深大家对这方面的理解，推动其发展。

## 一、奇异积分算子在加权 Morrey 空间上的有界性意义

### （一）有助于理论发展

加权 Morrey 空间是以经典 Morrey 空间为基础进行推广的，函数在局部区域中的平均增长可以得到权函数控制。此空间结构相较于其他结构，灵活性更强，对于局部奇异性函数的描述也起到了助推作用。本文我们研究的内容对于后续的研究来说，有着一定的奠基作用，能够为后续的研究形成理论支撑，让原本的理论内容更加丰富和完善[1-5]。

### （二）有助于解决问题

奇异积分算子在加权 Morrey 空间上的有界性不但有着很强的理论价值，而且实践价值方面也有所凸显，能够切实解决实际问题。以信号处理和图像处理为例，奇异积分算子的有界性可以用来设计高质量的算法模型[6]。图像处理过程中，相关人员在进行降噪、增强图像边缘时，就可应用奇异积分算子的有界性，此举对于图像处理效果有显著的提升作用。另外，奇异积分算子的有界性应用于信号处理领域时，能够提取相关特征，对信号进行去噪处理[7]。

## 二、奇异积分算子在加权 Morrey 空间上的有界性

### （一）多线性极大算子在加权 Morrey 空间上的有界性

Hardy-Littlewood 极大算子本身作用显著，相关人员不应忽略其重要性，应该意识到其扮演的重要角色。比如有的学者认为该算子能够对其他类型的奇异积分算子形成有效控制[8-9]。Lerner, Ombrosi, P´erez, Torres 和 Trujillo-Gonzalez 也一直在对相关方向进行研究，而且他们在原有基础上，还重新界定了

Hardy-Littlewood极大算子的相关理念。

**（二）多线性奇异积分算子及其交换子在加权 Morrey空间上的有界性**

对于Calderón-Zygmund奇异积分算子T，我们已熟知当$1<p<\infty$时，T在$L^p(R^n)$上有界，并满足两个端点估计$L^1(R^n)\to L^{1,\infty}(R^n)$和$L^\infty(R^n)\to BMO(R^n)$[10]。Coifman和Fefferman在中证明了Calderón-Zygmund奇异积分算子与极大Calderón-Zygmund奇异积分算子的加权不等式[11-12]。

$$\mathcal{T}(\vec{f})(x)=\int_{(\mathbb{R}^n)^m}K(x,y_1,\cdots,y_m)f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)dy_1\cdots dy_m,$$

## 三、奇异积分算子在加权 Morrey空间上的有界性趋势和发展对策

**（一）研究方法逐渐完善**

1.尝试应用最新数学工具

数学理论的日渐深入对该领域后续的发展起到了奠基作用，在数学理论涵义更加丰富之下，新的数学工具与方法也随之涌现，这些都使奇异积分算子在加权 Morrey空间上的有界性有了更多可能性。比如，有的研究人员在其中融入了非线性分析、复分析等方法，以此对算子性质与行为进行更为深入的研究。

2.数值模拟与实验验证

数值模拟与实验验证在对奇异积分算子有界性进行研究时发挥着重要作用，也是不断完善工作的手段之一。相关人员构造数值算法，就可以模拟出奇异积分算子的过程，而且也可以对实践中存在的问题进行进一步观察，以此验证相关结论是否正确。与此同时，最终的实验结果能够佐证理论，这些对于后续研究都可以提出有效反馈。

**（二）研究内容逐渐拓展**

1.奇异积分算子类型更为多样

相关研究还在不断深入，在此过程中奇异积分算子类型也变得更加丰富。目前，不仅有传统的Calderón-Zygmund奇异积分算子，而且还渐渐涌现出了柯西积分算子、交换子、分数次积分算子等。这些算子在加权 Morrey空间上的有界性研究，让原本单一的研究内容得到丰富，类型方面也有所拓展，这都将会深化教学内容[13]。

2.加权 Morrey空间推广力度加大

加权 Morrey空间属于较为重要的函数空间，其性质与应用价值在实践中已经得到了极为广泛的认可。但是，在研究的逐渐深入之下，广大学者对于加权 Morrey空间的研究程度还在不断加深，希望可以适应各领域发展的需求。例如，引入了变指标Morrey空间、非齐型空间等，这些都将会从一定程度上弥补传统研究的不足，并且也可以加大推广的力度。

**（三）应用范围逐渐扩大**

1.偏微分方程的应用

奇异积分算子在偏微分方程中的应用更多是体现于对解的正则性、存在性和唯一性，通过应用奇异积分算子的有界性，能够更加深入了解偏微分方程解的性质。所以，由于广大学者对于偏微分方程的研究已经日渐深入，因此也需要同时对奇异积分算子在加权 Morrey空间上有界性需求进行研究，且极为迫切。

2.信号处理和图像处理

信号处理与图像处理方面，奇异积分算子的有界所发挥的作用不容忽视。例如，当相关人员对跳跃的随机微分方程进行处理的过程中，奇异积分算子的有界性有助于人员切实控制跳跃项对解，由此就可以得到解的稳定性，对于其性质了解更加深入。通过上述分析可知，所具有的性质在信号与图像重建、降噪等方面意义重大[14]。

3.其他领域的应用

除了上述涉及的领域之外，奇异积分算子在加权 Morrey空间上的有界性不仅应用于上述，而且在其他领域也有应用。例如，量子力学领域，奇异积分算子的有界性有助于相关人员对粒子运动状态、性质进行研究；经济学和金融学领域，奇异积分算子的有界性能够使金融模型更加稳定，在风险控制方面也会更有思路[15]。

## 四、结束语

综上所述，奇异积分算子在加权 Morrey空间上的有界性研究呈现出研究方法不断创新和完善、研究内容不断拓展和深化、与实际问题的联系将更加紧密以及研究的深入与国际化合作等发展趋势。这些趋势将推动该领域的研究不断向前发展，为数学理论和应用领域的进步做出更大的贡献。

### *参考文献*


[1]潘亚丽，陈杰诚. 粗糙核多线性分数次极大算子和积分算子的双权估计［J］. 浙江师范大学学报（自然科学版），2021,pp.1-8.

[2]孙伟，徐良玉，谢如龙. 奇异卷积算子在加权 Wiener共合空间上的有界性［J］. 巢湖学院学报，2020,22(03):82-86.

[3]刘金瑞，郑涛涛，肖燕梅. 齐型空间上加权 Besov空间与 Triebel-Lizorkin空间的Tb定理［J］. 浙江科技学院学报，2024,36(01):1-12.

[4]楚晓媛，赵凯. Calderón-Zygmund算子与 Campanato函数生成的交换子在非齐度量测度空间上的有界性［J］. 东北师大学报（自然科学版），2023,55(02):6-10.

[5]刘建明，黄时祥. 多线性考尔德伦-赞格蒙(Calderon-Zygmund)算子交换子在莫里(Morrey)空间上的端点估计［J］. 上饶师范学院学报，2022,42(06):21-28.

[6]刘慧慧，唐剑，赵金虎. 沿超曲面的振荡奇异积分在加权 Wiener共合空间上的有界性［J］. 湖北大学学报（自然科学版），2022,44(06):659-667.

[7]方光杰，陶双平. RD空间上分数次积分算子及其交换子在广义 Morrey空间的加权有界性［J］. 吉林大学学报（理学版），2023,61(06):1287-1295.

[8]房成龙. 双线性 Calderón-Zygmund算子交换子在 Triebel-Lizorkin空间上有界的充分必要条件［J］. 东北师大学报（自然科学版），2021,53(01):7-13.

[9]刘慧慧，唐剑. 某类沿曲面的强奇异积分算子在调幅函数空间上的有界性［J］. 南通大学学报（自然科学版），2020,19(02):81-85+94.

[10]宋福杰，赵凯. 非齐度量测度 Morrey-Herz空间上的 Marcinkiewicz积分算子及其交换子［J］. 吉林大学学报（理学版），2020,58(02):219-224.

[11]黄亚改，史海盼，乔玉英. Clifford分析中超正则函数的拟 Cauchy型奇异积分算子的换序公式［J］. 高校应用数学学报 A辑，2019,34(04):461-472.

[12]蔡金玲，汤灿琴. Calderón-Zygmund奇异积分算子在变指数 Herz型 Hardy空间的有界性［J］. 西北师范大学学报（自然科学版），2019,55(03):30-34.

[13]朱敏，陶双平. 加权 Morrey空间上多线性奇异积分的振荡及变分算子的有界性［J］. 吉林大学学报（理学版），2021,59(04):719-724.

[14]吴翠兰，王云杰，束立生. 带非光滑核的奇异积分算子交换子的加权有界性估计［J］. 安徽师范大学学报（自然科学版），2018,41(02):110-116.

[15]常安成，黄创霞. 与满足变 H?rmander条件的奇异积分算子相关的 Toeplitz型算子（英文）［J］. 数学进展，2023,52(05):887-895.