

耦合非线性可变（2+1）维 Maccari 系统的精确显式解

谭璞

南华大学 数理学院，湖南 衡阳 421000

摘 要： 本文利用动力系统定性理论和分支方法研究耦合非线性可变（2+1）维 Maccari 系统，计算出它在参数条件不同的情况下的精确显式解。

关 键 词： Maccari 系统；相图分支；精确解

Exact Explicit Solutions for Coupled Nonlinear Variable (2+1)
Dimensional Maccari System

Tan Pu

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421000

Abstract： This paper uses the qualitative theory of dynamical systems and bifurcation methods to study the coupled nonlinear variable (2+1) dimensional Maccari system, and calculates its exact explicit solutions under different parameter conditions.

Keywords： Maccari system; phase diagram bifurcation; exact solution

引言

耦合非线性（2+1）维 Maccari 系统（MS）是 Macari 在^[1]中首次借助 Kadomtsev-Petviashvili 方程，基于时空重采样和傅里叶展开的渐进精确性化简方法引入的。MS 是如下所示的一种无量纲形式的三次非线性发展系统

$$\begin{cases} i\phi_t + \phi_{xx} + \phi\tau = 0, \\ \tau_t + \tau_y + \left(|\phi|^2\right)_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\phi = \phi(x, y, t)$ ， $\tau = \tau(x, y, t)$ 为自变量，分别代表负标量场与实标量场， x, y 表示彼此独立的空间变量， t 代表时间变量。

MS 是一个著名的模型，被用于定义量子力学、流体力学和等离子物理学等不同物理学领域中局部空间极小部分的孤立波的动力学，以研究非线性光学中出现的朗缪尔孤子的动力学。对 MS 可积性的研究主要采用 G' /G- 展开法，F- 展开法，李对称方法，变分原理以及行波假设^[2-4]。

本文使用动力系统定性理论和分支方法^[5]来研究 MS 的精确显式解。本文结构为：在第2节中，对 MS 进行变换，得出对应的平面动力系统，并对对应动力系统进行分析。在第3,4节中运用分支方法对在系数条件不同的系统计算出不同分支的对应精确解^[6]。

一、预备知识

$$(\xi_2 + \xi_3)P' + \xi_1(W^2)' = 0. \quad (5)$$

化简后我们有

$$W'' + \delta_1 W - \delta_2 W^3 = 0. \quad (6)$$

为了找到上述耦合非线性可变（2+1）维 Maccari 系统的行波解，我们考虑进行如下波变换

$$\phi(x, y, t) = e^{i\theta} W(\xi), \quad \varphi(x, y, t) = P(\xi), \quad (2)$$

其中

$$\xi = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 t, \quad \theta = \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 t, \quad (3)$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \theta_1, \theta_2$ 与 θ_3 为任意常数，那么系统（1）变为两个常微分方程

$$i\xi_3 W' - \theta_3 W - \theta_1^2 W + 2i\theta_1 \xi_1 W' + WP = 0, \quad (4)$$

其中 $\delta_1 = -\frac{(\theta_1^2 + \theta_3)}{\xi_1^2}$ ， $\delta_2 = \frac{1}{\xi_1(\xi_2 + \xi_3)}$ ，且 δ_1 与 δ_2 同号。

令 $y = W'$ ， $f(W) = -\delta_1 W + \delta_2 W^3$ ，可得对应的首次积分为

$$H(W, y) = y^2 - \frac{\delta_2}{2} W^4 + \delta_1 W^2 = h, \quad (7)$$

其中 h 为积分常数。通过计算可知系统（7）的平衡点为

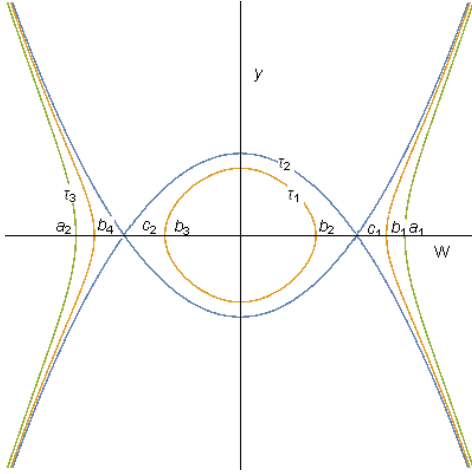
$$E_1 = (0, 0), \quad E_2 = \left(\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}, 0\right) \text{ 和 } E_3 = \left(-\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}, 0\right).$$

基金项目：校级科研课题（703，2015XQD23）某些高次数学物理方程的特殊解及其分支；国家级科研课题（709，230XJZ099）一类反应扩散方程解的存在性及稳定性研究。

作者简介：谭璞（2001.01—），女，苗族，湖南省邵阳市，硕士研究生，研究方向：微分方程与动力系统。

二、当 $\delta_1, \delta_2 > 0$ 时，系统的相图与精确解

当 $\delta_1, \delta_2 > 0$ 时，根据平面动力系统相关知识^[6]，可知平衡点 $E_1 = (0, 0)$ 为中心，平衡点 $E_2 = \left(\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}, 0\right)$ 和 $E_3 = \left(-\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}, 0\right)$ 为鞍点。系统相图如下所示



> 图1

(1) 令图1中的轨线 τ_1 与 W 轴的交点为 b_1, b_2, b_3, b_4 ，且有 $b_1 = -b_4$ ， $b_2 = -b_3$ 。则

$$\frac{\delta_2}{2}W^4 - \delta_1 W^2 + h = \frac{\delta_2}{2}(b_1 - W)(b_2 - W)(W - b_3)(W - b_4),$$

得到 W 的显式解为

$$W = \frac{b_1 sn^2\left(\pm\sqrt{\frac{\delta_2}{2}}\frac{\xi}{g}, k\right) - b_2}{b_1 sn^2\left(\pm\sqrt{\frac{\delta_2}{2}}\frac{\xi}{g}, k\right) - 1},$$

$$\text{其中 } g = \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}}, \quad k^2 = \frac{(b_1 + b_2)^2}{4b_1 b_2}.$$

(2) 令轨线 τ_2 与 W 轴的交点为 c_1, c_2 ，且有 $c_1 = -c_2$ 。在此情况下有，

$$\frac{\delta_2}{2}W^4 - \delta_1 W^2 + h = \frac{\delta_2}{2}(c_1 - W)^2(W - c_2)^2,$$

可得 W 的显示解为

$$W = \frac{c_1 - c_1 e^{\mp \alpha}}{e^{\mp \alpha} + 1},$$

其中 $\alpha = c_1 \sqrt{2\delta_2} \xi$ 。

(3) 轨线 τ_3 与 W 轴的交点为 $(a_1, 0), (a_2, 0), (0, 0)$ 。则有

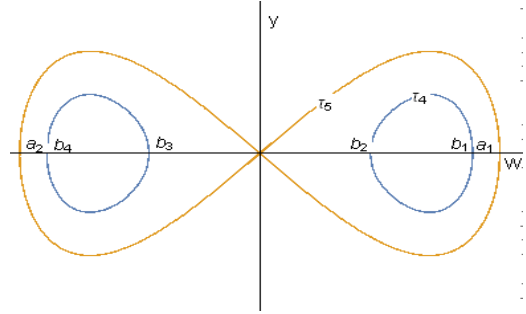
$$\frac{\delta_2}{2}W^4 - \delta_1 W^2 + h = \frac{\delta_2}{2}(a_1 - W)(0 - W)^2(a_2 - W),$$

其中 $a_1 = -a_2$ ，得出 W 的显式解为

$$W = a_1 \csc\left(\pm\sqrt{\frac{a_1^2 \delta_2}{2}} \xi\right).$$

三、当 $\delta_1, \delta_2 < 0$ 时，系统的相图与精确解

当 $\delta_1, \delta_2 < 0$ 时，根据平面动力系统相关知识^[7]，可得平衡点 $E_1 = (0, 0)$ 的为鞍点，平衡点 $E_2 = \left(\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}, 0\right)$ 与 $E_3 = \left(-\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}, 0\right)$ 都是中心^[9]。系统的相图如下所示



> 图2

(1) 图2中的轨线 τ_4 与 W 轴的交点横坐标为 b_1, b_2, b_3, b_4 ，并且有 $b_1 > b_2 > 0 > b_3 > b_4$ ， $b_1 = -b_4$ 以及 $b_2 = -b_3$ ^[10]。故可知

$$\frac{\delta_2}{2}W^4 - \delta_1 W^2 + h = -\frac{\delta_2}{2}(b_1 - W)(W - b_2)(W - b_3)(W - b_4),$$

得出 W 的显式解为

$$W = \frac{b_1 + \alpha \beta b_2}{\alpha \beta + 1}, \quad (8)$$

$$\text{其中 } \alpha = sn^2\left(\pm\sqrt{\frac{\delta_2}{2}}\frac{\xi}{g}, k\right), \quad \beta = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}.$$

(2) 轨线 τ_5 与 W 轴的交点横坐标为 $a_1, a_2, 0$ ，并且满足 $a_1 > 0 > a_2$ ， $a_1 = -a_2$ ，其中0为二重根。可得 W 的显式解为

$$W = \frac{2a_1 e^{\mp \alpha \sqrt{\frac{\delta_2}{2}} \xi}}{e^{\mp \alpha \sqrt{\frac{\delta_2}{2}} \xi} - 1}. \quad (9)$$

参考文献

- [1] Seadawy, Aly, R. Three-Dimensional Weakly Nonlinear Shallow Water Waves Regime and its Traveling Wave Solutions [J]. International Journal of Computational Methods, 2018.
- [2] Seadawy A R. Three-dimensional weakly nonlinear shallow water waves regime and its traveling wave solutions [J]. International Journal of Computational Methods, 2018, 15(03): 1850017.
- [3] Khater AH, Callebaut DK, Seadawy AR. General soliton solutions for nonlinear dispersive waves in convective type instabilities. Phys Scr 2006;74:384 - 93.
- [4] Ting PJ, Xun GL. Exact solutions to Maccari's system. Commun Theor Phys (Beijing, China) 2007;48:07 - 10.
- [5] 刘正荣. 微分方程定性方法和数值模拟 [M]. 华南理工大学出版社, 2013.
- [6] 董海玲, 唐娟, 肖地长. 带马尔可夫跳和可变迟滞的非线性耦合神经网络同步问题 [J]. 应用概率统计, 2022, 38(06): 836-846.
- [7] 焦贤发, 王如彬. 刺激下可变耦合神经振子群活动的非线性随机演化模型 [J]. 控制与决策, 2005(08): 897-900.
- [8] 鲍鹏, 姜哲良. 离散元-无限元非线性耦合法 [J]. 华中科技大学学报 (自然科学版), 2004(11): 91-93.
- [9] 池坤, 高坤. 多故障耦合转子系统非线性动力学研究 [J]. 技术与市场, 2023, 30(06): 49-55.
- [10] 陈静. PT 对称非局域非线性耦合系统中复合波的研究 [D]. 山西大学, 2023.