一题有多解　思维在发散
——椭圆中面积问题的解法探究

余望鸿

厦门市兴贤学校，福建 厦门 361100

摘　　要： 本文以一道高考真题为背景，以不同视角观察，从多个方向引入解题思路，根据不同的解题策略来进行分析、探讨，从而达到殊途同归的目的。通过对该题解法的探索，可以有效的拓宽解题思路，不断提升发散思维能力，便于今后面对解析几何中同类问题时能够从容应对。本文总共列举了6中不同的解法，每种解法各有优劣，有的经常用，有的不常用。在解决此类问题时，需要开动脑筋，不断转换思维角度，最后都能够完美的得到想要的结果。

关 键 词： 椭圆；面积；直线方程

Multiple Solutions to One Problem: Divergent Thinking - Exploring the Solutions to Area Problems in Ellipses

Yu Wanghong

Xiamen Xingxian School, Xiamen, Fujian 361100

Abstract: This paper takes a college entrance examination question as the background, observes from different perspectives, introduces the problem solving ideas from multiple directions, analyzes and discusses according to different problem solving strategies, so as to achieve the purpose of reaching the same destination. Through the exploration of this method, we can effectively broaden the thinking of solving problems, and constantly improve the ability of divergent thinking, so that we can calmly cope with similar problems in analytic geometry in the future. This paper lists 6 different solutions in total, each solution has its own advantages and disadvantages, some are often used, some are not commonly used. When solving such problems, we need to use our brains and constantly change the Angle of thinking, and finally we can get the desired result perfectly.

Keywords: ellipse; area; linear equation

真题再现

[例1] 已知 $A(0,3)$ 和 $P(3,\frac{3}{2})$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点。

（1）求 C 的离心率；

（2）若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且 ΔABP 的面积为9，求 l 的方程。

解法探究

由已知条件可以得到 $a^2=12$，$b^2=9$，所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$，接下来主要探索第（2）问的解法。

解法一：由于 $k_{AP}=\frac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\frac{1}{2}$，则直线 AP 的方程为：$y=-\frac{1}{2}x+3$，即 $x+2y-6=0$．根据两点间的距离公式，有 $|AP|=\sqrt{(0-3)^2+(3-\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$．现设点 B 到直线 AP 的距离为 d，由 ΔABP 的面积为9，可得 $d=\frac{2\times 9}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，则题意可转化为将直线 AP 沿着与 AP 垂直的方向平移 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ 个单位即可，此时该平行线与椭圆的交点即为点 B，设该平行线的方程为：$x+2y+c=0$，由两平行线间的距离即为点 B 到直线 AP 的距离，则有 $\frac{|c+6|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，解得 $c=6$ 或 $c=-18$．

1）当 $c=6$ 时，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1\\ x+2y+6=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\ y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\ y=\frac{-3}{2}\end{cases}$，即 B 点坐标为 $(0,-3)$ 或 $(-3,-\frac{3}{2})$．

①当 B 点坐标为 $(0,-3)$ 时，此时 $k_l=\frac{3}{2}$，直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$；

②当 B 点坐标为 $(-3,-\frac{3}{2})$ 时，此时 $k_l=\frac{1}{2}$，直线 l 的方程为

简介：余望鸿（1989.06-），男，汉族，江西省九江市，硕士研究生，一级教师，研究方向：中学数学教育。

$y=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$；

2）当 $c=-18$ 时，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1\\ x+2y-6=0\end{cases}$ 可得 $2y^2-27y+117=0$，由于 $\Delta=(-27)^2-4\times2\times117=-207<0$，此时该直线与椭圆无交点。

综上，直线 l 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

点评：解法一是先根据已知条件得到直线 AP 的方程以及 $|AP|$ 的值，然后以 AP 边为底，根据三角形的面积，求出三角形的高，即点 B 到直线 AP 的距离。 再利用平行线间的距离公式得到平移后的直线方程，并与椭圆方程联立即可得到 B 点坐标，进而求出直线 l 的方程 [1]。该解法就是根据常规思路，一步步按照要求解的问题逐次推进，从而得到最终的答案 [2]。

解法二：同解法一先得到直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$，以及点 B 到直线 AP 的距离 $d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.然后设 $B(x_0,y_0)$，则有 $\begin{cases}\frac{|x_0+2y_0-6|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}\\ \frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{9}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=-3\\ y_0=-\frac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=-3\end{cases}$，即 B 点坐标为 $(0,-3)$ 或 $(-3,-\frac{3}{2})$，接下来的步骤与解法一相同。

点评：解法二同解法一先求出直线 AP 的方程和点 B 到直线 AP 的距离，再设 $B(x_0,y_0)$，根据点到直线距离公式和点在椭圆上得到关于 x_0、y_0 的方程组，联立方程组，即可解出答案 [3]。 解法二是建立在解法一的基础上，从另一个角度来列方程组，虽然思路更加清晰明了，但运算量同样较大，不过最后仍可以达到殊途同归的效果 [4]。

解法三：同解法一得到直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$，点 B 到直线 AP 的距离为 $d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，现设 $B(2\sqrt{3}\cos\theta,3\sin\theta)$，其中 $\theta\in[0,2\pi)$，则有 $\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta-6|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，联立 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，解得 $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta=0\\ \sin\theta=-1\end{cases}$，即 B 点坐标为 $(0,-3)$ 或 $(-3,-\frac{3}{2})$，以下同法一。

点评：解法三与解法二在首尾两部分思路是完全一致的，只是中间部分求 B 点坐标的过程不一样而已。 该解法是利用椭圆的参数方程求解，虽然方法不同，但是运算量同样不小 [5]。

解法四：直接从直线 AB 斜率的存在情况入手：

1）当直线 AB 的斜率不存在时，此时 $B(0,-3)$，$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$，符合题意。 此时 $k_l=\frac{3}{2}$，直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$.

2）当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+3$，联立椭圆方程有 $\begin{cases}y=kx+3\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，则 $(4k^2+3)x^2+24kx=0$，其中 $k\neq k_{AP}$，即 $k\neq-\frac{1}{2}$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{-24k}{4k^2+3}$，$k\neq0$ 且 $k\neq-\frac{1}{2}$，令 $x=\frac{-24k}{4k^2+3}$，则有 $y=\frac{-12k^2+9}{4k^2+3}$，故 B 点坐标为 $\left(\frac{-24k}{4k^2+3},\frac{-12k^2+9}{4k^2+3}\right)$，同解法一得到直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$，点 B 到直线 AP 的距离为 $d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，则 $\frac{\left|\frac{-24k}{4k^2+3}+2\times\frac{-12k^2+9}{4k^2+3}-6\right|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，解得 $k=\frac{3}{2}$，此时 $B(-3,-\frac{3}{2})$，即可求得 $k_l=\frac{1}{2}$，故直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，综上，直线 l 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

点评：解法四是直接从直线方程入手，根据斜率是否存在分两种情况讨论，首先验证直线 AB 斜率不存在的情况，再设直线 $y=kx+3$，联立椭圆方程，得到点 B 坐标，再利用点到直线距离公式联立方程组来求斜率 [6]。 即可得出答案。 该解法虽然通俗易懂，但是计算过程并不轻松 [7]。

解法五：与解法四类似，依然从直线 AB 斜率的存在情况入手：

1）当直线 AB 的斜率不存在时，此时 $B(0,-3)$，$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$，符合题意。 此时 $k_l=\frac{3}{2}$，直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$.

2）当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+3$，联立椭圆方程有 $\begin{cases}y=kx+3\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，则 $(4k^2+3)x^2+24kx=0$，其中 $k\neq k_{AP}$，即 $k\neq-\frac{1}{2}$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{-24k}{4k^2+3}$，$k\neq0$ 且 $k\neq-\frac{1}{2}$，令 $x=\frac{-24k}{4k^2+3}$，则有 $y=\frac{-12k^2+9}{4k^2+3}$，故 B 点坐标为 $\left(\frac{-24k}{4k^2+3},\frac{-12k^2+9}{4k^2+3}\right)$. 现过点 P 作 x 轴的平行线交 AB 于点 M，令 $y=\frac{3}{2}$，则 $M(-\frac{3}{2k},\frac{3}{2})$，所以 $|MP|=\left|3+\frac{3}{2k}\right|$.

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|MP|\cdot|y_A-y_B|=\frac{1}{2}\left|3+\frac{3}{2k}\right|\cdot\left|3-\frac{-12k^2+9}{4k^2+3}\right|=9$，解得 $k=\frac{3}{2}$，此时 $B(-3,-\frac{3}{2})$，即可求得 $k_l=\frac{1}{2}$，故直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，综上，直线 l 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

点评：解法五是建立在解法四的基础上，设方程、解出 B 点坐标等，只是在三角形面积的处理上有所不同，该解法是利用切割法将三角形一分为二，利用水平宽乘铅锤高乘 $\frac{1}{2}$ 表达面积，同样可以得出结果 [8]。

解法六：直接从直线 l 的斜率的存在情况入手：

1）当 l 的斜率不存在时，$l:x=3$，$B(-3,-\frac{3}{2})$，$|PB|=3$，点 A 到 PB 的距离 $d=3$，此时 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times 6\times3=\frac{9}{2}\neq9$，不满足

条件。

2）当 l 的斜率存在时，设 $PB:y-\frac{3}{2}=k(x-3)$，令 $P(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$\begin{cases} y=k(x-3)+\frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$，消 y 可得 $(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$，

$\Delta=(24k^2-12k)^2-4(4k^2+3)(36k^2-36k-27)>0$，且 $k\neq k_{AP}$，即 $k\neq-\frac{1}{2}$，$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{24k^2-12k}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\frac{36k^2-36k-27}{4k^2+3} \end{cases}$，所以 $|PB|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{\left(\frac{24k^2-12k}{4k^2+3}\right)^2-4\cdot\frac{36k^2-36k-27}{4k^2+3}}$

$=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}$，同时可以得到点 A 到直线 PB 的距离 $d=\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}\cdot\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=9$，

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$，均满足题意，$\therefore\ y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$，即 $x-2y=0$ 或 $3x-2y-6=0$.

点评：解法六相较于解法四而言，转换了一个思维角度，该解法是从目标直线入手，然后根据斜率存在与否进行分析，首先考虑直线 PB 斜率不存在的情况，再设 $PB:y-\frac{3}{2}=k(x-3)$，利用弦长公式和点到直线的距离公式，即可得到答案，同样是利用已知条件列出等式，从而算出结果 [9]。

解法七：同样从直线 l 的斜率的存在情况入手：

1）当 l 的斜率不存在时，$l:x=3$，$B(3,-\frac{3}{2})$，$|PB|=3$，点 A 到 PB 的距离 $d=3$，此时 $S_{\text{Ã}ABP}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}\neq9$，不满足条件。

2）当直线 l 的斜率存在时，设 $l:y=k(x-3)+\frac{3}{2}$，设 l 与 y 轴的交点为 Q，令 $x=0$，则 $Q(0,-3k+\frac{3}{2})$，联立 $\begin{cases} y=kx-3k+\frac{3}{2} \\ 3x^2+4y^2=36 \end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2-8k(3k-\frac{3}{2})x+36k^2-36k-27=0$，其中 $\Delta=8k^2(3k-\frac{3}{2})^2-4(3+4k^2)(36k^2-36k-27)>0$ 且 $k\neq-\frac{1}{2}$，所以 $3x_B=\frac{36k^2-36k-27}{3+4k^2}$，即 $x_B=\frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$，则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AQ|\cdot|x_P-x_B|=\frac{1}{2}\left|3k+\frac{3}{2}\right|\cdot\left|\frac{12k+18}{3+4k^2}\right|=9$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$，经代入判别式验证均满足题意。则直线 l 为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$，即 $x-2y=0$ 或 $3x-2y$.

点评：设线法与解法六一致，在三角形面积的处理上又和解法五相似，解法五是将三角形横切，该解法则是竖切，然后还是利用水平宽乘铅锤高乘 $\frac{1}{2}$ 表达面积，最终同样可以得到答案 [10]。

结语：

在本文中，笔者针对椭圆上两点及其相关性质进行了深入探讨，并详细分析了七种不同的解法来求解特定条件下的直线方程。每一种解法都展示了独特的思考角度和解题策略，从直接利用已知条件逐步推导，到利用参数方程、弦长公式、点到直线距离公式等多种数学工具，展现了数学解题的多样性和灵活性。

参考文献

[1] 李翠．关于三角形面积问题的解法探究［J］．数理天地 (高中版)，2024（05）：33-34.

[2] 陈立刚．由一道椭圆中三角形面积问题引发的微探究［J］．高中数理化，2023（05）：25-27.

[3] 田学敏．一道椭圆中直线斜率问题的多角度探究［J］．中学数学，2024 (11)：97-98.

[4] 田鹏、王海辉．一道椭圆中直线过定点问题的探究与溯源［J］．中学数学研究 (华南师范大学版) .2022 (05)：39-42.

[5] 达延俊．例说椭圆中一类直线斜率定值问题的解法［J］．数学教学研究 .2012，31 (11)：37-38+41.

[6] 胡娜．一道关于椭圆中直线恒过定点问题的思考［J］．中学生数理化 (高二数学) .2018 (12)：3-4.

[7] 金一鸣．椭圆中斜率乘积为定值引出的直线过定点问题［J］．高中数学教与学 .2021 (07)：37-39.

[8] 曾志辉．解题教学应注重培养学生的数学思维品质——以“椭圆中一类直线斜率求和问题”为例［J］．中学数学教学参考 .2023 (31)：56-57.

[9] 张瑶．椭圆中的三角形面积问题——一堂公开课的教学反思［J］．数学大世界 (上旬) .2021 (10)：7-8.

[10] 王士强．解答圆锥曲线中面积问题的思路［J］．语数外学习 (高中版下旬) .2024 (08)：42-43.