

变化中的数学

欧建

四川轻化工大学机械工程学院, 四川 自贡 643000

摘 要 : “极限”是数学中的分支——微积分的基础概念, 广义的“极限”是指“无限靠近而永远不能到达”的意思。本文主要对极限思想和高次方程展开研究。

关 键 词 : 微积分; 极限思想; 数学变换; 特定方程解

Mathematics in Flux

Ou Jian

School of Mechanical Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong, Sichuan 643000

Abstract : "Limit" is the basic concept of calculus, a branch of mathematics. In a broad sense, "limit" means "infinitely close and never reach". This paper mainly studies the limit idea and higher order equation.

Keywords : calculus; limit ideas; mathematical transformations; solutions to specific equations

引言

微积分应用在许多地方, 微积分是导数的运算与逆运算, 而微积分的基本: 导数, 就是通过极限思想来得到, 所以一切的根本就是极限思想。

两个有关极限的定理的证明

定理1: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \neq 0$, 则有 $f(a) \approx g(a)$ 。(注意上述只是证明了必有约等的区间, 但并没有给出区间的实际范围)。假设这里的 $a \in F$ (规定 F 为一个由多个数组成的集合, $x \in F$, 在该集合内有: 随着集合内数的增加或减少, 总有 $\frac{|f(x) - g(x)|}{\max\{|f(x)|, |g(x)|\}} < 0.1$), 证明如下:

当 $f(x)$ 为一初等函数, $g(x)$ 为一初等函数时总有存在 a 使得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{x} \approx 0 \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(a)}{x} \approx 0, \text{ 于是就有 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x) + f(a)}{x}}{\frac{g(x) + g(a)}{x}} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}}。$$

采用反证法。假设不存在 $f(a) \approx g(a)$, 所以当 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \neq 0 \text{ 定满足下列式子:}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x) + f(a)}{x}}{\frac{g(x) + g(a)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(a)}{g(x) + g(a)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{g(a)} + \frac{f(a)}{g(x)g(a)}}{\frac{1}{g(a)} + \frac{1}{g(x)}} \end{aligned}$$

所以有 $\frac{f(a)}{g(a)} \approx 1$, 即 $f(a) \approx g(a)$, 与假设不符, 所以必存在 $f(a) \approx g(a)$, 因为两不同函数在同一点的取值可能会相差很大, 这时不能取约等, 因此 a 取值是有限制的, 即可以假设 $a \in F$ 。

定理2: 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} xg(x) \neq 0$, 则有

$f(a) \approx g(a)$ 。(注意上述只是证明了必有约等的区间, 但并没有给出区间的实际范围)。假设这里的 $a \in F$ (规定 F 为一个由多个数组成的集合, $x \in F$, 在该集合内有: 随着集合内数的增加或减少, 总有 $\frac{|f(x) - g(x)|}{\max\{|f(x)|, |g(x)|\}} < 0.1$), 证明如下:

当 $f(x)$ 为一初等函数, $g(x)$ 为一初等函数时总有存在 a 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} xf(a) \approx 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} xg(a) \approx 0$, 于是就有 $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) \neq 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0} xg(x) \neq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[f(x) + f(a)]}{x[g(x) + g(a)]} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{xg(x)}$ 。采用反证法。假

设不存在 $f(a) \approx g(a)$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) \neq 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0} xg(x) \neq 0$ 定满足下列式子:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{xg(x)} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[f(x) + f(a)]}{x[g(x) + g(a)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(a)}{g(x) + g(a)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(a)} + \frac{f(a)}{g(x)g(a)}}{\frac{1}{g(a)} + \frac{1}{g(x)}} \end{aligned}$$

所以就有 $\frac{f(a)}{g(a)} \approx 1$, 即 $f(a) \approx g(a)$, 这与假设不符, 所以必存在 $f(a) \approx g(a)$ 。因为两不同函数在同一点的取值可能会相差很大, 这时不能取约等, 因此 a 取值是有限制的, 即可以假设 $a \in F$ 。

上述两个定理的推广

推广1: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则有必存在 $f(a) \approx g(a)$ (注意上述只

是证明了必有约等的区间, 但并没有给出区间的实际范围)。假设这里的 $a \in F$ (规定 F 为一个由多个数组成的集合, $x \in F$, 在该集合内有: 随着集合内数的增加或减少, 总有 $\frac{|f(x)-g(x)|}{\max\{|f(x)|, |g(x)|\}} < 0.1$), 证明如下:

当 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 时, 设 $u(x) = \frac{xf(x)}{g(x)}$, $w(x) = x$, 则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{w(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w(x)}{x} = 1 \neq 0$, 即存在 $a \in F$ 使得 $u(a) \approx w(a)$, 所以有 $f(a) \approx g(a)$ 。

推广2: 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则有必存在 $f(a) \approx g(a)$ (注意上述只是证明了必有约等的区间, 但并没有给出区间的实际范围)。假设这里的 $a \in F$ (规定 F 为一个由多个数组成的集合, $x \in F$, 在该集合内有: 随着集合内数的增加或减少, 总有 $\frac{|f(x)-g(x)|}{\max\{|f(x)|, |g(x)|\}} < 0.1$), 证明如下: 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 时, 设 $u(x) = \frac{f(x)}{xg(x)}$, $w(x) = \frac{1}{x}$, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{w(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} xu(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} xw(x) = 1 \neq 0$, 即存在 $a \in F$ 使得 $u(a) \approx w(a)$, 即 $f(a) \approx g(a)$ 。

证明: 当 $n > 0$ 时有 $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

由 Stirling 公式知: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$, 设 $f(n) = n!$, $g(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, 所以必存在 $a \in F$ 使得 $f(a) \approx g(a)$, 通过计算机试算知当 $x > 0$ 时有 $\frac{|f(x)-g(x)|}{\max\{|f(x)|, |g(x)|\}} < 0.1$, 所以对于 $n > 0$ 有 $f(n) \approx g(n)$, 就有 $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (n > 0)$ 。

证明: 当 $x \in [0, 0.7]$ 时, 有 $\int_0^x e^{-x^2} dx \approx \arctan(x)$

设 $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$, $g(x) = \frac{1}{xe^{x^2}}$, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{1+x^2} = 1$, 所以存在 $a \in F$ 使得 $f(a) \approx g(a)$, 稍微变换一下就有 $1+x^2 \approx e^{x^2}$ 。设 $u(x) = e^{x^2}$, $w(x) = 1+x^2$, 于是就有当 $x=0$ 时有 $u(0) = w(0) = 1$, 当 $x > 0$ 时有 $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} > w(x) > 0$, 也有 $\frac{|u(x)-w(x)|}{\max\{|u(x)|, |w(x)|\}} = \frac{e^{x^2}-1-x^2}{e^{x^2}} = 1 - \frac{1+x^2}{e^{x^2}}$, 设 $h(x) = 1 - \frac{1+x^2}{e^{x^2}}$, 则 $h'(x) = \frac{2x^3}{e^{x^2}} > 0$, 所以有 $\frac{|u(x)-w(x)|}{\max\{|u(x)|, |w(x)|\}} < 1$ 且逐渐增大, 注意到当 $x=0.7$ (这里取近似值) 时, $\frac{|u(x)-w(x)|}{\max\{|u(x)|, |w(x)|\}} < 0.1$, 于是就有当 $x \in [0, 0.7]$ 时有 $e^{x^2} \approx 1+x^2$, 于是就有 $\int_0^x e^{-x^2} dx \approx \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$, x 的取值范围: $x \in [0, 0.7]$ 。

证明: 对于 $x \geq 1$ 时有, $\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{4} - \frac{\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{8} \approx \frac{x^2+x-2}{2}$

设 $f(n) = \sqrt{n^2+n}$, $g(n) = n$, 于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$, (如要满足上述须有 $n > 0$), 于是就有存在 $a \in F$, 使得 $f(a) \approx g(a)$ 。假设存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $|f(n)-g(n)| < \varepsilon$ 恒成立, 即有 $\sqrt{n^2+n}-n < \varepsilon$, 移项再两边平方得: $n^2+n < n^2+\varepsilon^2+2\varepsilon n$, 于是可得, 当 $\varepsilon=0.5$ 时, 上述式子恒成立, 于是就有 $\sqrt{n^2+n}-n < 0.5$ 。又由于 $n > 0$ 有 $f(n) > g(n) > 0$, 设 $h(n) = \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n^2+n}}$, 有 $h'(n) = -\frac{n}{2\sqrt{n^2+n}(n^2+n)} < 0$, 所以有 $\frac{|f(n)-g(n)|}{\max\{|f(n)|, |g(n)|\}} < 1$ 且逐渐减小, 注意到当 $n=5$ (这里取近似值) 时, $\frac{|f(n)-g(n)|}{\max\{|f(n)|, |g(n)|\}} < 0.1$, 于是就有当 $n \geq 5$ 时, $f(n) \approx g(n)$ 。不难发现 $\sqrt{n^2+n}$ 与 $n+0.5$ 同样满足约等条件且通过试算得知其值更加相近, 所以可以用 $\sqrt{n^2+n} \approx n+0.5$ 代替 $\sqrt{n^2+n} \approx n$, 设 $f(n) = \sqrt{n^2+n}$, $g(n) = n+0.5$, 不难发现也有性质: $\frac{|f(n)-g(n)|}{\max\{|f(n)|, |g(n)|\}} < 1$ 且逐渐减小, 又注意到当 $n=1$ (这里取近似值) 时有 $\frac{|f(n)-g(n)|}{\max\{|f(n)|, |g(n)|\}} < 0.1$, 所以当 $n \geq 1$ 时恒有 $\sqrt{n^2+n} \approx n+0.5$, 即有 $\int_1^x \sqrt{x^2+x} dx \approx \int_1^x x+0.5 dx = \frac{x^2+x-2}{2}$ 。

$\int \sqrt{x^2+x} dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} dx$, 令 $u = x + \frac{1}{2}$, $dx = du$, 则原式 = $\int \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}} du$, 令 $u = \frac{1}{2\cos t}$, $du = \frac{\sin t}{2\cos^2 t} dt$, 则原式 = $\int \frac{\sin^2 t}{4\cos^3 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^3 t} - \frac{1}{\cos t} dt$ 。
 $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos x} d(\tan x)$ 利用分部积分法得: 原式 = $\frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x d\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, 而 $\int \tan x d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \int \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} dx$, 于是就有 $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{2\cos x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos x} dx$, 而 $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{1-\sin^2 x} d(\sin x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$, 所以就有:

$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{2\cos x} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$ 所以有:
 $\int \frac{\sin^2 t}{4\cos^3 t} dt = \frac{\tan t}{8\cos t} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)$, 因为 $\cos t = \frac{1}{2u}$, 所以 $\sin t = \sqrt{1 - \frac{1}{4u^2}}$, $\tan t = \sqrt{4u^2-1}$, 所以就有: 原式 = $\frac{2u\sqrt{4u^2-1} - \ln(2u+\sqrt{4u^2-1})}{8}$, 因为 $u = x + \frac{1}{2}$, 所以有:
 $\int \sqrt{x^2+x} dx = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{4} - \frac{\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}{8} + C$ 。

所以有:

$\int_1^x \sqrt{x^2+x} dx = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{4} - \frac{\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{8}$
即当 $x \geq 1$ 时有:
 $\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{4} - \frac{\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{8} \approx \frac{x^2+x-2}{2}$

证明: 当 $x \in [0, 0.7]$ 时有 $\int_0^x \sqrt{\tan x} dx \approx \int_0^x \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

设 $u(x) = \sqrt{\tan x}$, $h(x) = \sqrt{x}$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时就有 $u(x) > h(x)$

> 0 , 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \cos x = 1$, 所以有存在 $a \in F$ 使得

$\sqrt{\tan x} \approx \sqrt{x}$, 即 $u(x) \approx h(x)$ 。设 $h(x) = \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{x}}{\sqrt{\tan x}}$, 有 $h'(x) =$

$\frac{x - \sin x \cos x}{2 \sin x \cos x \sqrt{\tan x} \sqrt{x}} > 0$, $\frac{|u(n) - h(n)|}{\max\{|u(n)|, |h(n)|\}} < 1$ 且逐渐增大, 注

意到当 $x = 0.7$ (这里取近似值) 时, $\frac{|u(n) - h(n)|}{\max\{|u(n)|, |h(n)|\}} < 0.1$, 于

是就有当 $x \in [0, 0.7]$ 时有 $u(x) \approx h(x)$, 即 $\int_0^x \sqrt{\tan x} dx \approx \int_0^x \sqrt{x} dx =$

$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ 。

证明: 当 $x \in [2, +\infty)$ 时有 $\int_2^x \ln(e^x - 1) dx \approx \int_2^x x dx = \frac{x^2 - 4}{2}$

设 $f(x) = x$, $g(x) = \ln(e^x - 1)$, 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(e^x - 1)} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x} = 1$, 所以存在 $x \in F$ 使得 $f(x) \approx g(x)$, 不难发现

当 $x \geq 1$ 时 $f(x) > g(x) > 0$, 设 $h(x) = \frac{x - \ln(e^x - 1)}{x}$, 于是就有

$h'(x) = \frac{(e^x - 1) \ln(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} < \frac{(e^x - 1)x - x e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$, 所以有

$\frac{|f(x) - g(x)|}{\max\{|f(x)|, |g(x)|\}} < 1$ 且逐渐减小, 注意到当 $x = 2$ (这里取近似值)

时有 $\frac{|f(x) - g(x)|}{\max\{|f(x)|, |g(x)|\}} < 0.1$, 于是有当 $x \geq 2$ 时, $\ln(e^x - 1) \approx x$,

所以就有: $\int_2^x \ln(e^x - 1) dx \approx \int_2^x x dx = \frac{x^2 - 4}{2}$ 。

证明: 对于 $x \geq 0$ 有 $\int_0^x \sqrt{(x+1)x} + \sqrt{(x+1)x} + \dots dx = \frac{x^2 + 2x}{2}$

设 $x = \sqrt{n} + \sqrt{n} + \dots$, 两边同时平方则有, $x^2 = n + x$, 即

$x^2 - x - n = 0$ 。代入求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 有, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4n}}{2}$,

易知, $n \geq 0$, $x \geq 0$, 有 $x = \frac{1 - \sqrt{1 + 4n}}{2}$ (舍), 即 $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}$ 。

设 $n = m^2 + m$, 则有 $x = m + 1$, $m^2 + m \geq 0$, 即 $m \geq 0$ 或 $m \leq -1$ 。

于是有 $m + 1 = \sqrt{m(m+1)} + \sqrt{m(m+1)} + \dots$, 可知 $m + 1 \geq 0$, 于是就有 $m \leq -1$ (舍), 即 $m \geq 0$ 。于是对于 $x \geq 0$ 就有:

$\int_0^x \sqrt{(x+1)x} + \sqrt{(x+1)x} + \dots dx = \frac{x^2 + 2x}{2}$ 。

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)!}{\ln(x)} = 1$

设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 由于 $\infty - \infty$ 为不确定的值, 所以 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不一定成立。例如设

$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, $g(x) = x$, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} =$

1 , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$

$\frac{1}{2}$, 于是就有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 。

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^n = 1$, 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^n x = \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$,

注意到两边同时关于 0 到 x 积分也相等, 即有 $(n \neq -1)$:

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \sin^n x dx = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x x^n dx = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, 稍微变换一下就有

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^n x dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^n x dx}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x \sin^n x dx)'}{(n+1)x^n} = \dots =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x \sin^n x dx)^{(n+1)}}{(n+1)!}$, 所以就有 $n! = \lim_{x \rightarrow 0} [(\int_0^x \sin^n x dx)^{(n+1)}]$ 。

注意到 $(-2)! = \lim_{x \rightarrow 0} [(\int_0^x \frac{1}{\sin^2 x} dx)^{(-1)}]$, $\int_0^x \frac{1}{\sin^2 x} dx = C - \frac{\cos x}{\sin x}$,

$C = \infty$, $(\int_0^x \frac{1}{\sin^2 x} dx)^{(-1)} = \int C - \frac{\cos x}{\sin x} dx = Cx - \ln(\sin x) + D$, 所以

$(-2)! = \lim_{x \rightarrow 0} Cx - \ln(\sin x) + D$, 因为 $n! = n \times (n-1)!$, 所以有 $0! = 0 \times (-1)! = 1$, $(-1)! = \infty = (-1) \times (-2)! = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin x) - Cx - D = \lim_{x \rightarrow 0} \ln$

$(\sin x) - E$, 其中 $E = \lim_{x \rightarrow 0} Cx + D$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, 所以有

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)!}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x) - E}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, 所以

有 $(-1)! = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$ 不一定成立。

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n! \ln(n)$

知 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ [1], 其中 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n\}$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $x_0 = a$, $x_n = b$, 又因为 ξ_i 的取法是任意的, 注意到可以取 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$,

$\xi_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$, 于是稍微变换一下即有 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{(b-a)i}{n})$, 令 $a = 0$, $b = 1$ 有 $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$,

令 $f(x) = \ln(x)$, 则有 $\int_0^1 \ln(x) dx = (x \ln(x) - x)|_0^1 = -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(\frac{i}{n})$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(\frac{i}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\frac{n!}{n^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n!}{n^n})' \frac{n^n}{n!}$, 由于 $(\frac{n!}{n^n})' =$

$\frac{(n!)^n - n! n^n (\ln(n) + 1)}{n^{2n}}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n!}{n^n})' \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n!} - \ln(n) - 1$, 所

以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n!} - \ln(n) = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n! \ln(n)$ 。

以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n!} - \ln(n) = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n! \ln(n)$ 。

证明: 当 $a \geq 1$ 时 $w(x) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2a}} e^{-x^{\frac{1}{2a}}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a \Gamma(a) \frac{2a-3}{2a-2} \frac{2a-5}{2a-4} \dots \frac{\pi}{2}$

由高斯积分知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 令 $x^2 = t$, 则 $dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$, 于

是就有 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。另一方面知 $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} =$

$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy$ [2], 令 $x = t^{2\lambda}$, 就有 $\frac{1}{t^{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^{2\lambda} y^2} dy$, 将 t 换做

x 即有 $\frac{1}{x^{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^{2\lambda} y^2} dy$, 令 $\lambda = \frac{1}{2}$ 得出 $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy$,

代入有 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)x} dy dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)x}$

$dx dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+y^2} dx dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \arctan y|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

对于 $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2a}} e^{-x^{\frac{1}{2a}}} dx$, 令 $\lambda = \frac{1}{2a}$, 得出 $\frac{1}{x^{\frac{1}{2a}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^{2\lambda} y^2} dy$, 于

是就有 $\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2a}} e^{-x^{\frac{1}{a}}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)x^{\frac{1}{a}}} dy dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)x^{\frac{1}{a}}} dx dy$, 令 $(1+y^2)x^{\frac{1}{a}} = t$, 有 $dx = \frac{at^{a-1}dt}{(1+y^2)^a}$, 原式 $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{at^{a-1}e^{-t}}{(1+y^2)^a} dt dy$
 $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} a\Gamma(a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)^a} dy$, 令 $y = \tan x$, 就有 $dy = \frac{1}{\cos^2 x} dx$, 原式 $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} a\Gamma(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-2} x dx$, 由于当 n 为偶数且 $n \geq 2$ 时有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{\pi}{2}$, 所以当 $2a-2 \geq 2$ 即 $a \geq 2$ 时有 $\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2a}} e^{-x^{\frac{1}{a}}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a\Gamma(a) \frac{2a-3}{2a-2} \frac{2a-5}{2a-4} \dots \frac{\pi}{2}$ 。由于当 $a=1$ 时 $\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1) \frac{\pi}{2} = \sqrt{\pi}$, 符合前述 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以 $a=1$ 也满足等式, 即当 $a \geq 1$ 时有 $\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2a}} e^{-x^{\frac{1}{a}}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a\Gamma(a) \frac{2a-3}{2a-2} \frac{2a-5}{2a-4} \dots \frac{\pi}{2}$ 。

求特定一元多次方程的根式解

易知:

$$a+b=(a+b)$$

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$(a+b)^5=a^5+b^5+5ab(a^3+b^3)+10a^2b^2(a+b)$$

$$(a+b)^7=a^7+b^7+7ab(a^5+b^5)+21a^2b^2(a^3+b^3)+35a^3b^3(a+b)$$

所以有:

$$(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)-(a^5+b^5)=0$$

$$(a+b)^7-7ab(a+b)^5+14a^2b^2(a+b)^3-7a^3b^3(a+b)-(a^7+b^7)=0$$

$$\text{设 } x=a+b, \quad p=7ab, \quad q=14a^2b^2, \quad m=7a^3b^3, \quad n=a^7+b^7,$$

于是原式可以等价于: $x^7 - px^5 + qx^3 - mx - n = 0$, 由于

$$a = \sqrt[7]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4}{4802} p^2 q m}}{2}}$$

$$b = \sqrt[7]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4}{4802} p^2 q m}}{2}}$$

所以解得:

$$x = \sqrt[7]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4}{4802} p^2 q m}}{2}} + \sqrt[7]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4}{4802} p^2 q m}}{2}}$$

当且仅当 $p^2 = \frac{7}{2}q$, $p^3 = 49m$ 时等号成立。

不难发现存在 $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, 使得:

$$(a+b)^{2n+1} - m_1 ab(a+b)^{2n-1} + m_2 a^2 b^2 (a+b)^{2n-3}$$

$-\dots + (-1)^n m_n a^n b^n (a+b) - (a^{2n+1} + b^{2n+1}) = 0$ 假设 $x = a+b$,
 $q_i = m_i a^i b^i$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $k = a^{2n+1} + b^{2n+1}$, 就有存在 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $p_i \in \mathbb{R}$ 且 $p_i \neq 0$ 使得:

$$a = \sqrt[2n+1]{\frac{k + \sqrt{k^2 - \frac{4}{\prod_{i=1}^n m_i^{p_i}} \prod_{i=1}^n q_i^{p_i}}}{2}}$$

$$b = \sqrt[2n+1]{\frac{k - \sqrt{k^2 - \frac{4}{\prod_{i=1}^n m_i^{p_i}} \prod_{i=1}^n q_i^{p_i}}}{2}}$$

$$\text{其中 } \frac{4}{\prod_{i=1}^n m_i^{p_i}} \prod_{i=1}^n q_i^{p_i} = 4a^{2n+1} b^{2n+1}$$

将假设代入原式得:

$x^{2n+1} - q_1 x^{2n-1} + q_2 x^{2n-3} - \dots + (-1)^n q_n x - k = 0$ 的其中一个根式解为:

$$x = \sqrt[2n+1]{\frac{k + \sqrt{k^2 - \frac{4}{\prod_{i=1}^n m_i^{p_i}} \prod_{i=1}^n q_i^{p_i}}}{2}} + \sqrt[2n+1]{\frac{k - \sqrt{k^2 - \frac{4}{\prod_{i=1}^n m_i^{p_i}} \prod_{i=1}^n q_i^{p_i}}}{2}} \quad \text{当}$$

且仅当 $q_i^{\frac{1}{p_i}} = q_i \frac{m_i^{\frac{1}{p_i}}}{m_i}$ 时等号成立, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 。

定理3: 若 $f(x)$ 为单调函数且 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 不存在

证明: 第一种情况, 当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续时, 则有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 不存在; 第二种情况, 当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续时, 由于 $f(x)$ 为单调函数, 所以不存在 $f(a) = f(b)$ 且 $a \neq b$ 的情况, 又由于 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x))$, 所以 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 不存在。

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1+x^2}{x}}$ 不存在

可以设 $f(x) = e^{x^3+x}$, 于是就有 $f'(x) = (3x^2+1)e^{x^3+x} > 0$, 所以 $f(x)$ 为单调递增函数, 设 $g(x) = \frac{1}{x}$, 有 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$, 所以就有 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x))$, 所以就有 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1+x^2}{x}}$ 不存在。

定理推广: 若 $f(x)$ 不为单调函数且 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 可能存在

证明: 假设 $f(a) = f(b)$ 且 $a \neq b$, 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = a \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = b$ 时, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x))$, 于是就有了 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 存在。

结论

定积分广泛应用于许多方面, 但是由于一些不定积分没有初等函数, 这使得有些定积分计算起来特别复杂繁琐, 这里提供了一些计算定积分的方法, 但是有些许瑕疵, 希望能为广大读者提供帮助, 并激励着人们不断寻找如何解定积分的兴趣。同时也运用了数学中的一些变换技巧, 得出了一些意想不到的结果, 让人喜欢上对数学的研究。

参考文献

- [1] 吴赣昌. 高等数学: 上册 [M]. 第五版 北京: 中国人民大学出版社, 2017: 233.
- [2] 邢家省, 杨义川, 王拥军. 菲涅尔积分的几种计算方法 [J]. 四川理工学报: 自然科学版, 2016, 29(5): 90