基于构造辅助函数的微分中值问题证明与应用

颜嵩林[1]，孙杰华[1]，陈秀姣[2*]，王海兰[1]
1. 桂林旅游学院，广西 桂林 541006
2. 桂林医学院第二附属医院，广西 桂林 541199

摘 要： 在微分中值定理的证明题中，经常需要构造合适的辅助函数，而如何构造辅助函数是解决这类问题的关键。目前关于辅助函数的构造方法有很多种，这些方法大多数技巧性强，实用性低，且有些方法较复杂甚至不容易求得辅助函数。本文通过分析构造辅助函数的本质，给出几类微分中值证明题中辅助函数构造的一般方法，并且通过相关例题进行说明，以期得到实用性强、使用范围广、构造简单的辅助函数的方法，从而有效地提高学生解决这类问题的能力。最后，通过几个简单例题说明微分中值定理在数学中的应用。

关 键 词： 微分中值定理；证明题；辅助函数；数学构造法

Proof And Application Of Differential Median Value Problem Based On Constructing Auxiliary Functions

Yan Songlin [1],Sun Jiehua [1], Chen Xiujiao[2*], Wang Hailan [1]
1. Guilin Tourism University, Guilin, Guangxi 541006
2. The Second Affiliated Hospital of Guilin Medical College, Guilin, Guangxi 541199

Abstract: In the proof questions of differential mean value theorem, it is often necessary to construct appropriate auxiliary equations, and how to build these auxiliary equations is the key to solving such problems. Currently, there are several methods to construct auxiliary equations. However, most of those methods have strong exquisite strategies, and some methods are complex to obtain auxiliary equations. This article analyzes the essence of auxiliary equations, provides normal methods for constructing auxiliary equations in several types of differential mean value proof problems. Besides, we explain our methodologies through relevant examples, in order to obtain simple ways for constructing auxiliary equations. Finally, several simple examples are illustrated to explain the application of the differential mean value theorem in other types of problems.

Keywords: differential mean value theorem; proof questions; auxiliary equation; mathematical construction method

一、引言

微分中值定理最初的朦胧认识源于几何学和物理学。在古希腊时代，著名数学家阿基米德总结出一个结论：任意抛物线形成的弓形不但面积可以求解，而且过弓形顶点的切线一定平行于抛物线的底边[1][2]。随后，意大利数学家卡瓦列里在《不可分量几何学》一书中也得出一个观点：曲线段上至少有一个点的切线平行于曲线的某条弦[3]。物理学上，微分中值定理更加直观，凭借感觉就可以得知，物体运动的瞬时速度一定会在某个时刻与平均速度一样。因此严格的证明上述特定现象变得十分迫切。

微分中值定理的严格理论研究早在1677年就开始了[4]。法国数学家罗尔于1691年在《方程的解法》一文中率先提出了：多项式形式的“罗尔定理”[5]。随后，法国数学家拉格朗日进一步拓展了该定理，于1797年在《解析函数论》中证明了“拉格朗日定理”[6]。法国数学家柯（(Cauch)）对微分中值定理进行系统研究，并发现了最后一个微分中值定理。他发现了微分中值定理在极限、求解方程中的重要作用，使其成为一元微分学的核心理论。在他的著作《无穷小计算教程概论》中，柯西不但严格地证明了“拉格朗日定理”，而且在他的另外一部著作《微分计算教程》中将其推广为更加一般化的微分中值定理—“柯西微分中值定理”[7]。现代高等数学关于微分中值定理部分的教学以罗尔定理，拉格朗日中值定理和柯西中值定理为核心[8]。这三个定理是整个一元微分学的理论基础，在高等数学课程中的地位十分重要，也是高中知识与大学知识联系的一个桥梁。

微分中值定理作用不同于微积分计算，其侧重于定性的分析函数性态和函数性质，从理论上分析和证明导函数的局部性质和函数本身在区间上的整体性质之间的关系[9]。其核心思想是：揭示在某定义区间内函数整体性质和该区间中某一点导函数值（包括函数的一阶导函数和二阶导函数等）之间的关系。微分中值定理除了理论性证明以外，还能够应用导数定性的分析和判断相关

基金项目：桂林旅游学院2021年度课程思政教育教学改革研究项目（2021KCSZJG007）；
桂林旅游学院教育教学改革研究项目（2021XJJG005）
通讯邮箱：yansl@sccas.cn

函数的单调性、极值、凹凸性和拐点等重要函数状态。因此，微分中值定理在整个高等数学中理论部分有着重要作用，它架起了利用微分研究函数的桥梁。

微分中值定理是一系列中值定理的统称，主要包括罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理。这三个微分中值定理之间存在内在联系，拉格朗日中值定理与柯西中值定理都是罗尔中值定理的推广，其中拉格朗日中值定理是微分中值定理的核心，证明则是通过构造合适的辅助函数，然后利用罗尔定理完成证明[10]。这种辅助函数的构造，是证明微分中值定理的难点，根据相关文献[11][12]，常用的辅助函数构造方法有：几何法、观察法、常数k值法、凑原函数法、微分方程法、积分法、行列式法、变上限积分法、指数因子法等。这些方法往往需要根据命题的特征，经过推敲与不断修正而构造出来的，似乎没有统一的规律，从而使得辅助函数的构造显得困难甚至神奇。因此，在具体题型上采用哪种方式更加合适，需要大量的练习积累经验以及正确的数学思维加以引导。本文通过总结上述方法，从不同角度归纳、推导了几类中值证明题中辅助函数构造的一般方法。此外，结合若干例题用于说明微分中值定理在导数极限、导数估值、方程根（零点）的存在性、不等式的证明，以及计算函数极限等方面解题中的一些应用。

二、构造辅助函数的基础理论

由于微分中值定理部分内容理论性强，抽象程度高，且题型都是以证明题为主。因此课堂上授课难度加大，且容易照本宣科的进行教学。正如胡国专在《数学方法论与大学数学教学研究》一书中明确指出：教师不仅要教会学生具体的基本数学知识及逻辑推理能力，而且还要教会学生如何发现数学、创造数学及应用数学[13]。这就要求我们教师需通过自己的教学活动让学生看到“活生生”的数学研究工作，而不是死的数学知识，并且帮助学生真正理解、领会有关数学内容及其内在的思想方法。更加复杂的是在微分中值定理相关命题的证明过程中已知条件出现的形式并不能直接推导出所要的结果。因此，生硬的知识灌输会导致学生的学习兴趣下降，难于理解和应用。

一般而言，微分中值定理的命题是不能利用三个定理的结论直接得出，因此需要借助一个合适的辅助函数来实现这类数学问题的等价转换，构建条件和结论之间的桥梁[14][15]。但是，不同于以往的证明题和计算题，辅助函数的直接引入是十分晦涩和难于理解的，从而使学生面对辅助函数的由来会茫然无措，学生自然要问：“为什么要构造辅助函数？这个辅助函数是怎么构造出来的？”。针对上述问题，虽然我们不知道数学家当时的想法，但作为一个数学教师有必要引导学生去思考知识的产生过程及解决问题的方法。另一方面，如何自然的在微分中值定理证明题中构造辅助函数一直是教学中的一个难点。为了说明上述问题，这里首先从拉格朗日中值定理的证明过程来展示辅助函数的构造过程，然后通过例题逐一介绍不同类型的证明命题利用哪种方式来构建具体的辅助函数。

拉格朗日中值定理的证明主要是采用构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，然后利用罗尔中值定理完成证明的，下面给出具体条件和结论。

罗尔中值定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$。

拉格朗日中值定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,, \tag{1}$$

在罗尔中值定理成立的前提下，我们来分析拉格朗日中值定理的证明思路。从上述定理的条件和结论易知，在拉格朗日中值定理中当 $f(a)=f(b)$ 时就是罗尔中值定理。因而罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情况。我们自然会想到能否运用罗尔中值定理来证明拉格朗日中值定理？观察罗尔中值定理的结论，左端是一个函数在某点处的导数值，右端为零。于是，我们来考察（1）式，显然它可以改写为：

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\,, \tag{2}$$

对比罗尔中值定理，自然我们会去思考（2）式左端是哪个函数在点 ξ 处的导数值？不妨设该函数为 $F(x)$，这也是我们为什么要构造辅助函数，即 $F'(x)\big|_{x=\xi}=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

因此，只要 $F(x)$ 满足罗尔中值定理的条件定理即可得证。于是问题转化为如何确定函数 $F(x)$，也即辅助函数 $F(x)$ 是怎么构造出来的。

通过分析，易知，$f'(\xi)$ 是函数 $f(x)$ 在点 ξ 处的导数值，而常数 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是函数 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ 点 ξ 处的导数值。于是，辅助函数可设为 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$（也可适当加常数）。

通过上述分析过程，易发现，对于要证明含有 $f'(\xi)$ 的恒等式，一般可以构造辅助函数，采用罗尔中值定理证明。而构造辅助函数是解决这类问题的关键。下一章节将具体介绍三种构造辅助函数的一般方法。

三、构造辅助函数的一般方法

总的来说，构造辅助函数方法很多，需要解答者具备较高的技巧性和灵活性。具体选择哪个方式，首先要分析命题的条件和结论，从而有效判断所要应用的定理，然后将需要证明的等式或者不等式进行恒等变形，变形后的式子一般需要接近构造的辅助函数被应用定理后的结果。因此，恒等变形以后的形态是选择哪种方式构造辅助函数的主要依据。下面我们通过不同实例来说明构造辅助函数的常用方法。

（一）求原函数法（不定积分法）

例1 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立。

解：要证的等式可化为 $f(a)g'(\xi)-f(\xi)g'(\xi)-g(\xi)f'(\xi)+$

$g(b)f'(\xi)=0$，即 $[f(a)g(x)-f(x)g(x)+g(b)f(x)]'_{x=\xi}=0$，于是构造辅助函数 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+g(b)f(x)$，易知，$F(x)$ 满足罗尔定理的条件，得证。

例2 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=0$，$g(a)=g(b)=0$，试证明在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 成立。

解：将结论中的 ξ 换成 x，得 $f(x)g''(x)-g(x)f''(x)=0$，等式两边积分得 $\int[f(x)g''(x)-g(x)f''(x)]dx=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)+C=0$，故可构造辅助函数为 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$，易知，$F(x)$ 满足罗尔定理的条件，得证。

例3 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，$f(a)g(b)=g(a)f(b)$，试证明在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$ 成立。

解：将结论中的 ξ 换成 x，等式可化为 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{g'(x)}{g(x)}=0$，等式两边积分得 $\int[\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{g'(x)}{g(x)}]dx=\dfrac{f(x)}{g(x)}+C=0$，故可构造辅助函数为 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，易知，$F(x)$ 满足罗尔定理的条件，得证。

（二）柯西中值定理法

如果需要证明的微分中值定理的等式中可化为 $\dfrac{G(b)-G(a)}{g(b)-g(a)}=F(\xi,f(\xi),f'(\xi))$ 形式，则可以采用柯西中值定理进行证明。这类题型的特点是命题表达式中含有两个常数 a,b，且表达式中常数 a 与常数 b 可分离。

例4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$。

解：要证的等式可化为 $\dfrac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$，于是构造辅助函数 $G(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，得 $\dfrac{G'(x)}{g'(x)}=f(x)-xf'(x)$，又函数 $G(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理条件，即得证。

例5 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得：$a^2f(b)-b^2f(a)=ab(a-b)\dfrac{2f(\xi)-\xi f'(\xi)}{\xi}$.

解：可将等式化为 $\dfrac{\frac{f(b)}{b^2}-\frac{f(a)}{a^2}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\dfrac{2f(\xi)-\xi f'(\xi)}{\xi}$. 可令 $G(x)=\dfrac{f(x)}{x^2},g(x)=\dfrac{1}{x}$ 求得 $\dfrac{G'(x)}{g'(x)}=\dfrac{2f(x)-xf'(x)}{x}$. 由柯西中值定理得证。

例6 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，试证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得：$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

解：可将等式化为 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1^2-0^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$. 可令 $G(x)=f(x)$，$g(x)=x^2$ 求得 $\dfrac{G'(x)}{g'(x)}=\dfrac{f'(x)}{2x}$. 由柯西中值定理得证。

（三）微分方程法

如果微分中值定理的命题式可化为 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=h(\xi)$ 形式，那么可通过解一阶线性微分方程 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=h(\xi)$ 得通解 $f(\xi)e^{\int g(\xi)d\xi}-\int h(\xi)e^{\int g(\xi)d\xi}d\xi=C$ 的方法来证明。由此该类型题目的解题思路一般如下：首先，构造辅助函数 $F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}-\int h(x)e^{\int g(x)dx}dx$，然后利用罗尔定理即可。下面我们通过几个例题来详细说明这种方法。

例7 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$ 成立。

解：要证的等式可化为 $f'(\xi)+\dfrac{af(\xi)}{\xi-b}=0$，所以可构造辅助函数为 $F(x)=f(x)e^{\int\frac{a}{x-b}dx}=(x-b)^a f(x)$。由题设知 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，即可得证。

例8 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，若 $f(a)=f(b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=3\xi^2(f(\xi)-f(a))$ 成立。

解：要证的等式可化为 $f'(\xi)-3\xi^2f(\xi)=-3\xi^2f(a)$，所以可构造辅助函数为 $F(x)=f(x)e^{\int-3x^2dx}-\int-3x^2f(a)e^{\int-3x^2dx}dx=(f(x)-f(a))e^{-x^3}$。由题设知 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，即可得证。

例9 已知 $f(x)$ 连续，且 $f(a)=f(b)=0$，求证在 (a,b) 上有一点 ξ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{-2\xi}=f(\xi)$。[10]

解：先将待证式子进行整理为 $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$，那么该式可以变为一个很简单的微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+2xy=0, \tag{3}$$

求解该方程：

$$\frac{1}{y}dy=-2xdx\Rightarrow \ln y=-x^2+C, \tag{4}$$

令待定常数 $C=0$，式（4）可化简为 $\ln y=-x^2$，即 $y=e^{-x^2}$ 或者 $ye^{x^2}-1=0$。因此，忽略常数项后，可设辅助函数为：$F(x)=f(x)e^{x^2}$。

又因为 $F(a)=F(b)=0$，那么由罗尔定理就有 $F'(\xi)=f'(\xi)e^{\xi^2}+2\xi e^{\xi^2}f(\xi)=0$，也即 $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$，整理则题目得证。

四、微分中值定理的应用

微分中值定理相比微分计算部分的理论性更强，也是微分学的理论基础部分。对于初学者而言，该部分通常以证明题为主，但是实际上微分学的很多重要应用都是可以利用微分中值定理进行求解的。由于常用的高等数学或者数学分析书籍在该部分侧重于理论证明，因此下面将用相应例题来展示微分中值定理在下列问题上的应用，包括：可导函数在某区间内根的存在性与唯一性问题；可导函数不等式的证明与极限求解。

（一）方程根的存在性

例10 证明方程 $5ax^4+4bx^3+3cx^2=a+b+c$ 在（0,1）内至少

有一个实根，其中a，b，c均为常数。

解：分析：设 $f(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2-(a+b+c)$，则令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt=ax^5+bx^4+cx^3-(a+b+c)x$，原问题等价于求 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ 的导数 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点。又因为 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在（0，1）内可导，且 $F(0)=F(1)=0$。所以函数 $F(x)$ 满足罗尔中值定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$$F'(\xi)=5a\xi^4+4b\xi^3+3c\xi^2-(a+b+c)=0\ , \tag{5}$$

即 $\xi\in(0,1)$ 是方程 $5ax^4+4bx^3+3cx^2=a+b+c$ 的根。

（二）求极限

一般而言，函数的极限求解通常可以用洛必达定理，但是这种常规的计算方法对于某些题目而言会造成解题过程中出现大量计算或者造成解题过程繁琐。这种计算量较大的求解过程往往会导致解题错误。然而，如果转变思路采用微分中值定理的话，可以为这类题目提供一种简单有效的方法。与证明题类似，利用微分中值定理来求极限，关键点仍然在辅助函数的构造，通过辅助函数结合相应的微分中值定理就可以求出极限。

例11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)$，其中 $a>0$。

解：分析：由于题目中有指数项 $a^{\frac{1}{n}}$ 和 $a^{\frac{1}{n+1}}$，因此尝试构造辅助函数 $f(x)=a^x$，可知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ 上连续，在开区间 $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ 上可导，满足拉格朗日中值定理条件。

根据题意，由拉格朗日中值定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\left(a^n\right)'\Big|_{x=\xi}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a^{\xi}\ln a}{2n(n+1)}=\frac{\ln a}{2}\end{aligned}\ , \tag{6}$$

其中，$\xi\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$。

（三）不等式证明

不等式的证明除了常用不等式以外，对于连续函数通常利用介值定理，最值定理来证明；而可导的函数可以采用单调性，凹凸性来证明。但是有些类型函数如果采用微分中值定理则可以大大简化证明过程。一般过程是根据不等式两边的式子形式选取一个合适的辅助函数，再利用微分中值定理求出一个等式，最后利用这个自变量的不同取值范围进行讨论，从而得出相应的不等式。这里通过几个例题来详细说明相关步骤。

例12 求证当 $x>0$ 时，$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$。[16]

解：设辅助函数 $f(x)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})$，那么在区间 $[0,x]$ 上对 $f(t)$ 使用拉格朗日中值定理，可得 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{x}{\sqrt{1+\xi^2}}$，其中 $\xi\in(0,x)$。因此有 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{\sqrt{1+\xi^2}+x^2}{\sqrt{1+\xi^2}}$，又因为 $\xi\in(0,x)$，所以 $\frac{\sqrt{1+\xi^2}+x^2}{\sqrt{1+\xi^2}}>\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}$，取 ξ 的上限，即 $x=\xi$，可得 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$。

例13求证当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}$。[17]

解：设辅助函数 $f(t)=\ln(1+t)-t$，$F(t)=t^2$，在区间 $[0,x]$ 上对函数 $f(t)$ 与 $F(t)$ 满足柯西微分中值定理条件，有：$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(x)-f(0)}{F(x)-F(0)}$，其中 $\xi\in(0,x)$，那么：$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2(1+\xi)}$，又因为 $\xi\in(0,x)$，则 $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2(1+\xi)}<-\frac{1}{2(1+x)}$，所以 $-\frac{1}{2}<\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}<-\frac{1}{2(1+x)}$，化简后可得：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}$，原命题得证。

五、结论

微分中值定理是微分学的重要组成部分，同时也是高等数学的学习重点与难点。一般而言，微分中值定理部分的课程内容是比较晦涩的。特别是微分中值定理中的证明题，由于思路灵活，方法多样，经常造成学生没有解题思路。本文重点研究了微分中值定理中常用的证明方法。通常，微分中值定理的证明过程通常需要构造辅助函数进行，因此这里详细讨论了几种典型的辅助方程构造方法，并通过相关例子进行具体说明。最后，通过不同类型的例题介绍了微分中值定理在方程根的定性分析、极限求解和不等式证明中的应用，从相关例子中我们可以看出，微分方程的应用往往也离不开辅助函数的构造，因此，辅助函数的构造技巧值的研究和探讨的。

参考文献：

[1] 史蒂夫·斯托加茨［美］. 微积分的力量［M］. 任烨，译. 北京：中信出版集团，2021.

[2] Victor J. Katz (1995), "Ideas of Calculus in Islam and India", Mathematics Magazine 68 (3): 163–174 [165–9 & 173–4]

[3] 刘和义，刘旭浩. 微积分发展简史［J］. 衡水学院学报，2005，7(1):3.

[4] 卢玉峰. 微分中值定理历史与发展一［J］. 高等数学研究，2008.

[5] 陈宁. 微分中值定理的历史演变［J］. 大学数学，2003，19(2):96-99.

[6] 卢占化. 拉格朗日微分中值定理纵横观［J］. 2020.

[7] 乔南. 微积分的历史、现状和未来（三）［J］. 中学数学教学参考：上半月高中，2006.

[8]朱新华. 微分中值定理应用中的辅助函数的构造方法［J］. 陶瓷学报，1994(Z1):4. DOI:CNKI:SUN:TCXB.0.1994-Z1-001.

[9] 张太忠，黄星，朱建国. 微分中值定理应用的新研究［J］. 南京工业职业技术学院学报，2007，7(4):4.DOI:10.3969/j.issn.1671-4644.2007.04.009.

[10] 李君士. 两个微分中值定理证明中辅助函数的多种作法［J］. 数学的实践与认识，2004，34(10):5.DOI:10.3969/j.issn.1000-0984.2004.10.029.

[11] 林小龙. 微分中值问题中辅助函数的构造法及其应用［J］. 福建商学院学报，2004(5).

[12] 李兴东. 微分中值问题辅助函数的构造方法［J］. 兰州交通大学学报，2008，27(3):3.

[13] 胡国专. 数学方法论与大学数学教学研究［M］. 苏州：苏州大学出版社，2016.

[14] 吕喜明，邵颖丽. 浅谈微分中值类问题中辅助函数的构造［J］. 内蒙古财经大学学报，2004(2):82-83.

[15] 祝浩锋，杨晓平. 微分方程在构造微分中值命题的辅助函数中的应用［J］. 浙江海洋学院学报：人文科学版，1998.

[16] 湖心亭看雪. 微分中值定理证明题中构造辅助函数的方法［DB/OL］. 知乎. (2018.01.28)[2023.02.19]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/33271753.

[17] 许同学. 文献阅读8：利用微分中值定理证明不等式［DB/OL］. 知乎. (2020.09.17)[2023.02.19]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/250281036 .